clairement énoncé que les mathématiciens pouvaient utiliser l'infini, mais seulement l'infini en puissance ou potentiel, c'est-à-dire l'indéfini (comme la suite des entiers ou celle des divisions successives d'une grandeur continue). Pendant très longtemps, la pratique des mathématiciens est restée conforme à cet interdit et l'infini actuel s'est introduit d'abord subrepticement avec le calcul sur les nombres décimaux illimités dès le XVIIe siècle ; R. Goblot expose ce calcul dans le chapitre 1 de son ouvrage. Sur le modèle de ces nombres, on a ensuite considéré des expressions algébriques infinies, en particulier les séries de puissances d'une variable. Le même XVIIe siècle a vu apparaître une forme d'actualisation de l'infini dans l'introduction des points à l'infini du plan par G. Desargues en vue d'unifier la théorie des sections coniques (ellipse, parabole, hyperbole) ; selon Desargues, ces courbes ne diffèrent que par leur comportement à l'infini. R. Goblot explique la construction du plan projectif ainsi obtenu dans son chapitre 2.

Par ailleurs, les fondateurs du calcul différentiel et intégral ont introduit des quantités *infiniment petites* dont le statut n'était pas bien précisé et variait selon les auteurs ; corrélativement, des quantités infiniment grandes étaient inévitables comme inverses des quantités infiniment petites. Au XVIIIe siècle, les tentatives pour donner des définitions précises de telles quantités étaient encore très peu satisfaisantes et finalement, dans ses *Leçons*, Cauchy (1821) définit les infiniment petits comme des suites qui tendent vers 0 . Mais le calcul sur les suites convergentes n'a pas les bonnes propriétés du calcul sur les nombres : deux suites ne sont pas nécessairement comparables ; il existe des couples de suites non nulles dont le produit est nul. La solution de cette difficulté a été découverte par A. Robinson avec l'*analyse non standard* (1966), que R. Goblot expose dans son chapitre 10.

La transgression radicale de l'infini actuel a été effectuée par G. Cantor à la fin du XIXe siècle lorsqu'il a introduit les ensembles infinis et les nombres transfinis (ordinaux et cardinaux). Ce processus d'*actualisation* de l'infini est le sujet principal du livre de R. Goblot. La distinction aristotélicienne entre acte et puissance est expliquée au chapitre 3, dans lequel les cardinaux transfinis de l'ensemble des entiers et de l'ensemble des nombres réels sont abordés ; le second cardinal est strictement supérieur au premier ce qui va à l'encontre de l'idée ancienne selon laquelle un infini ne peut pas dépasser un autre infini, l'infini ayant quelque chose d'absolu. La théorie naïve des ensembles fait l'objet des chapitres 4 à 7 ; le chapitre 5 (principe de récurrence) et le chapitre 7 (axiome du choix) expliquent comment on peut atteindre des résultats portant sur des ensembles infinis par des raisonnements fondés.

Au cours de ces développements de la théorie naïve des ensembles, R. Goblot fait bien sentir l'incapacité d'une description informelle à atteindre une rigueur satisfaisante. Cela le conduit naturellement à exposer une théorie des nombres réels au chapitre 9 et une théorie axiomatique des ensembles au chapitre 10. On voit, au cours de ces exposés, que les théories axiomatiques ont toujours quelque chose d'incomplet et qu'elles ne permettent pas d'épuiser la richesse de la réalité mathématique.

Car R. Goblot revendique avec force une position *platonicienne*, selon laquelle il y a une réalité mathématique que l'on explore à l'aide de l'outil mathématique. Cette position agacera sans doute plus d'un lecteur, mais je ne pense pas que l'on puisse pratiquer les mathématiques sans la partager au moins partiellement. Si le réel se reconnaît à ce qu'il résiste, comme un mur dans lequel on se cogne, personne ne peut nier que les objets considérés par les mathématiciens résistent ; on ne décide pas arbitrairement si un nombre donné est premier ou est une somme de deux carrés. Au cours de l'histoire, les objets mathématiques ont pu changer de statut, mais le nouveau statut, acquis dans une théorie plus élaborée, se révèle comme connaissance plus approfondie d'un objet qui était déjà là, imparfaitement connu.

On aura compris que le livre de R. Goblot traite d'un sujet fondamental et qu'il apporte des développements pénétrants et riches. Mais, pour l'essentiel, il reste élémentaire et accessible aux non mathématiciens ; seul le chapitre 10 contient des parties plus techniques. Cet ouvrage devrait permettre de renouer avec la tradition de la philosophie des mathématiques, un peu en sommeil actuellement ; car, il est clair que la philosophie des mathématiques ne peut se faire sainement que de l'intérieur des mathématiques et non pas à partir de discours vagues et superficiels empruntés à la philosophie analytique.

Christian Houzel

Table des matières

Introduction 1

1 Nombres entiers, nombres réels 9
1.1. Introduction . . . 9
1.1.1. Les deux sortes de nombres de la vie quotidienne . . . 9
1.1.2. Première notion d'objet . . . 10
1.1.3. Assertions prédicatives, processus de substantivation . . . 11
1.2. L'ensemble **N** des entiers naturels . . . 11
1.2.1. Qu'est-ce qu'un ensemble ? . . . 13
1.2.2. Notion de bijection . . . 15
1.2.3. Limites d'une approche « naïve » . . . 16
1.3. L'ensemble **R** des nombres réels . . . 17
1.3.1. Nombres réels comme abscisses de points sur une droite . . . 18
1.3.2. Points dont l'abscisse est un nombre décimal . . . 20
1.3.3. Nombres réels positifs comme rapports de longueurs . . . 24
1.3.4. Structure d'ordre sur **R** . . . 29
1.3.5. Nombres rationnels . . . 31
1.3.6. Addition dans **R** . . . 34
1.3.7. Multiplication dans **R** . . . 36
1.3.8. Nombres réels positifs comme rapports de grandeurs continues . . . 40
1.4. Liens entre ces deux notions de nombre . . . 40
1.4.1. Les entiers sont-ils des réels particuliers ? . . . 42
1.4.2. Passage par schématisation d'un univers à l'autre . . . 42
1.4.3. Notion de points sur une droite . . . 44
1.5. Les nombres négatifs . . . 45
1.6. Conclusion . . . 47

2 Un peu de géométrie 47
2.1. Géométrie selon une direction . . . 51
2.2. Aperçu sur les géométries métrique et affine . . . 51
2.2.1. Problématique des constructions géométriques . . . 52
2.2.2. Construction à la règle seule . . . 54
2.2.3. Espace apparent et espace réel . . . 55
2.2.4. Géométrie affine et géométrie métrique . . . 57
2.2.5. Grosseur d'un objet dans le contexte affine . . . 60
2.3. Aperçu sur la géométrie projective . . . 68
2.4. Aperçu sur la géométrie sphérique . . . 69
2.5. Repères en géométrie . . . 71
2.6. Conclusion . . . 73

3 Cardinaux du dénombrable et du continu 73
3.1. Ensembles infinis . . . 73
3.1.1. L'infini potentiel et l'infini actuel . . . 74
3.1.2. Considération de la droite numérique **R** comme ensemble . . . 76
3.2. Cardinaux infinis . . . 77
3.2.1. Le cardinal dénombrable $\aleph_0$ . . . 79
3.2.2. Exemple d'ensemble non dénombrable . . . 82
3.2.3. Autres exemples d'ensembles dénombrables . . .

4 Théorie élémentaire des ensembles
4.1. Ensemble des parties d'un ensemble . . . 87
4.2. Applications entre ensembles . . . 91
4.3. Une infinité de cardinaux infinis . . . 97
4.4. Paradoxes et fondements de la théorie des ensembles . . . 101
4.4.1. Paradoxe des collections qui ne sont pas des ensembles . . . 101
4.4.2. Petit aperçu de la théorie des types de Russell-Whitehead . . . 102
4.4.3. Aperçu sur les systèmes axiomatiques et les langages formels . . . 105

5 Le principe de récurrence
5.1. Raisonnement par récurrence . . . 109
5.2. L'ensemble **N** comme ensemble bien ordonné . . . 114
5.3. Quelques applications arithmétiques . . . 116
5.4. Exemples de constructions de suites par récurrence . . . 117

6 Ensembles quotients
6.1. Relations d'équivalence et ensembles quotients . . . 119
6.1.1. Type de prédicat associé à une relation d'équivalence . . . 119
6.1.2. Décomposition canonique d'une application . . . 124
6.2. Exemples algébriques . . . 126
6.2.1. Premiers exemples . . . 126
6.2.2. Quotient d'un groupe additif par un sous-groupe . . . 129
6.2.3. Étude de plusieurs exemples . . . 132
6.3. Exemple de l'équipollence entre segments orientés . . . 139
6.4. Conclusion . . . 145

7 Axiome du choix
7.1. Problème des sections . . . 147
7.2. Ensembles bien ordonnés . . . 147
7.2.1. Ensembles totalement ordonnés . . . 147
7.2.2. Définition des ensembles bien ordonnés . . . 150
7.2.3. Ensembles bien ordonnés de nombres réels . . . 152
7.2.4. Principe de récurrence transfinie . . . 155
7.2.5. Comparaison d'ensembles bien ordonnés . . . 159
7.2.6. Nombres ordinaux . . . 162
7.3. Axiome du choix . . . 165
7.3.1. Axiome du choix et théorème de Zermelo . . . 165
7.3.2. La fonction de choix τ de Hilbert . . . 169
7.4. Conclusion . . . 174

8 Compléments algébriques et géométriques
8.1. Réunion, intersection, produits cartésiens d'ensembles . . . 175
8.1.1. Réunion et intersection d'une famille d'ensembles . . . 175
8.1.2. Les quantificateurs . . . 176
8.1.3. Produit cartésien d'une famille finie d'ensembles . . . 180
8.1.4. Application aux calculs sur les cardinaux . . . 181
8.1.5. Opérations sur les ordinaux . . . 185
8.2. Ensembles de points du plan et corps de nombres . . . 188
8.2.1. Un peu de géométrie analytique . . . 188
8.2.2. Sous-corps de **R** engendré par une partie . . . 191
8.2.3. Ensembles de points constructibles à la règle seule . . . 194
8.2.4. Racines carrées . . . 201
8.2.5. Sous-corps de **R** stables par racines carrées positives . . . 205
8.2.6. Ensembles de points constructibles à la règle et au compas . . . 208
8.2.7. Le corps **C** des nombres complexes . . . 214
8.3. Extensions de la notion de nombre . . . 222
8.3.1. Construction de l'anneau **Z** des entiers relatifs . . . 222
8.3.2. Construction du corps **Q** des nombres rationnels . . . 229

8.3.3. Deuxième description de **C** comme corps de rupture sur **R** du polynôme $1 + X^2$ . . . 234
8.3.4. Aperçu sur les corps finis . . . 238
8.3.5. Structures algébriques abstraites . . . 241

9 Le corps R des nombres réels
9.1. Ordre, opérations et phénomènes de densité . . . 245
9.2. Propriété fondamentale de **R** et applications . . . 249
9.2.1. Le théorème des bornes inférieure et supérieure . . . 249
9.2.2. Application au théorème des suites monotones . . . 252
9.2.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . 257
9.2.4. Suites de Cauchy . . . 259
9.2.5. Quelques exemples de sous-ensembles de **R** . . . 262
9.2.6. Conclusion de l'approche intuitive . . . 265
9.3. Description formelle de **R** par les sections finissantes . . . 265
9.4. Description formelle de **R** par les suites de Cauchy . . . 273
9.5. Unicité du corps des nombres réels . . . 280
9.6. Les infiniment grands en analyse . . . 284

10 Théorie des ensembles
10.1. Poursuite de l'exploration « naïve » . . . 287
10.1.1. Le théorème de Cantor-Bernstein . . . 288
10.1.2. Premières conséquences de l'axiome du choix . . . 289
10.1.3. Le théorème de Zorn . . . 294
10.1.4. Les ensembles bien ordonnés sans l'axiome du choix . . . 301
10.2. L'axiomatique ZF de la théorie des ensembles . . . 305
10.2.1. Préliminaires logiques et notations . . . 305
10.2.2. Les axiomes de Z_0 . . . 309
10.2.3. Nombres ordinaux . . . 318
10.2.4. Entiers naturels et ensembles finis . . . 325
10.2.5. Récurrence sur la collection des entiers . . . 331
10.2.6. L'axiome A5 de fondation et la théorie des types . . . 337
10.2.7. Sous-univers des objets de rangs finis . . . 343
10.2.8. Cardinalité, axiome du choix A7, résultats de compatibilité relative . . . 345
10.2.9. Énoncés, objets définissables, paramètres . . . 349
10.3. Les très grands nombres entiers . . . 353
10.3.1. Ultra-puissances du corps **R** des nombres réels . . . 354
10.3.2. Ultraproduit d'une suite d'ensembles . . . 367
10.3.3. Construction d'un modèle non standard . . . 370
10.3.4. Les mathématiques non standard . . . 384
10.4. Le point de vue constructiviste-intuitionniste . . . 401
10.4.1. Le rejet du tiers exclu . . . 402
10.4.2. L'infini dans le cadre constructif . . . 416
10.4.3. Les diverses sortes de nombres : entiers, rationnels, réels . . . 423
10.5. Conclusion . . . 434

Annexe A. Résumé des problématiques
A.1. Processus de substantivation . . . 439
A.2. Les conceptions platoniciennes . . . 441
A.3. L'approche axiomatique et le formalisme . . . 443
A.4. Problématique sur la notion d'entier naturel . . . 446
A.5. Problématiques de l'infini . . . 448
A.6. Les espaces de la géométrie . . . 454

Annexe B. Premier contact
B.1. Approche intuitive . . . 457
B.2. Approche axiomatique et formelle . . . 463

Bibliographie 469
Index 471