Sur une table, n pièces de monnaie sont posées avec leur coté "pile" visible.
On choisi au hasard (et avec équiprobabilité) une pièce et on la retourne.
On recommence l'opération tant qu'il reste au moins une pièce avec son coté "pile" visible.

Combien faut-il, en moyenne, d'étapes pour aboutir ?

$T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$ où t_k est le temps moyen pour passer de k pièces coté "face" à $k+1$.
$t_0 = 1$ puis, pour $k \geqslant 1$, $t_k = \frac{n-k}{n} \times 1 + \frac{k}{n} \times \left(1 + t_{k-1} + t_k\right)$ c'est à dire $t_k = \frac{n}{n-k} + \frac{k}{n-k} t_{k-1}$

$$t_k = \frac{n}{n-k} + \frac{nk}{(n-k)(n-k+1)} + \frac{nk(k-1)}{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)} + \cdots + \frac{nk(k-1)\ldots1}{(n-k)(n-k+1)\ldots n} t_0 = n \sum_{i=0}^{k} \frac{k!(n-k-1)!}{i!(n-i)!} = \binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$$

$$t_k + t_{n-1-k} = \binom{n-1}{k}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{n-j} \right) = 2^n \binom{n-1}{k}^{-1} \quad \text{donc} \quad T_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^{-1} = 2^{n-1} \sigma_{n-1}$$

$$\sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \quad \text{où} \quad \lambda_k = \frac{k!(n-k-1)!}{(n-1)!} \quad \text{et, comme} \quad \binom{n}{k}^{-1} = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{n}\lambda_k = \frac{k}{n}\lambda_{k-1} \quad \text{on a}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\lambda_k + \frac{k}{n}\lambda_{k-1} \right) = 2 + \frac{1}{2n} \left(2 + (n+1) \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k \right) = 1 + \frac{n+1}{2n} \sigma_{n-1} \quad \text{donc}$$

$$\sigma_n = 1 + \frac{n+1}{2n} + \frac{n+1}{4(n-1)} + \frac{n+1}{8(n-2)} + \ldots + \frac{n+1}{2^n}\sigma_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{(n+1-k)2^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{2^\ell}{\ell} \quad \text{et donc} \quad T_n = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n}{\ell} 2^{\ell-1}$$

Et on peut éventuellement noter que $T_{n+1} = 2^n + \frac{n+1}{n} T_n$.
Concernant le comportement assymptotique, on a :

$$\sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^{-1} \approx 2\left(1 + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{(n-1)(n-2)}\right) = 2\,\frac{n^2-2n+2}{n^2-3n+2} \quad \text{donc } T_n \approx \frac{n-2}{n-3} \times 2^n$$

Quelle est la proba. qu'on aboutisse sans repasser par l'état initial ?

Pour $k \in \{1..n-1\}$, $p_k =$ proba. de réussir en partant de k pièces du bon coté :
$p_1 = \frac{n-1}{n} p_2$; $\forall k \in \{2..n-2\}$, $p_k = \frac{k}{n} p_{k-1} + \frac{n-k}{n} p_{k+1}$; $p_{n-1} = \frac{n-1}{n} p_{n-2} + \frac{1}{n} \times 1$
C'est à dire $\forall k \in \{1..n-1\}$, $p_{k+1} - p_k = \frac{k}{n-k}(p_k - p_{k-1})$ avec $p_0 = 0$ et $p_n = 1$
D'où, $\forall k \in \{1..n-1\}$, $p_{k+1} - p_k = \frac{k(k-1)\ldots1}{(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)}(p_1 - p_0) = \frac{k!(n-k-1)!}{(n-1)!} p_1 = \binom{n-1}{k}^{-1} p_1$
et donc $\forall k \in \{1..n\}$, $p_k = p_1 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}^{-1}$ et en particulier $1 = p_n = p_1 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^{-1} = p_1 \sigma_{n-1}$
La proba. demandée est donc $\pi_n = \sigma_{n-1}^{-1} \approx \dfrac{n-3}{2(n-2)}$

Comment varie π_n ?

$\pi_{n+1} \geqslant \pi_n \iff \sigma_{n-1} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2n}\sigma_{n-1} \, (= \sigma_n) \iff \sigma_{n-1} \geqslant 2 + \frac{2}{n-1} \iff n \geqslant 4$ et avec égalité lorsque $n = 4$ vu que $\sigma_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{1}$.

La probabilité est donc minimale (égale à 3/8) lorsqu'il y a 4 ou 5 pièces et tend vers 1/2 lorsque $n \to \infty$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
π_n	1	1/2	2/5	3/8	3/8	5/13	60/151	105/256	35/83	$\cdots$
	1	0.5	0.4	0.375	0.375	0.385	0.397	0.410	0.421	$\cdots$

REMARQUE : $\sigma_0 = 1$; $\sigma_n = 1 + \frac{n+1}{2n}\sigma_{n-1}$; $\sigma_{n-1} = 2\left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots + \frac{a_d}{n^d} + o\left(\frac{1}{n^d}\right)\right)$

$$4n\left(1 + \sum_{k\geqslant1} a_k (n+1)^{-k}\right) = 2n + 2(n+1)\left(1 + \sum_{k\geqslant1} a_k n^{-k}\right)$$

$$2\sum_{k\geqslant1} a_k X^k (1+X)^{-k} = X + (1+X)\sum_{k\geqslant1} a_k X^k$$

$$\sum_{k\geqslant1} a_k X^k \left(1 - (2k+1)X + 2\sum_{\ell\geqslant2} (-1)^\ell \binom{k+\ell-1}{k-1} X^\ell\right) = X$$

$$\sum_{p\geqslant1} a_p X^p - \sum_{p\geqslant2} (2p-1) a_{p-1} X^p + 2\sum_{p\geqslant3} \left(\sum_{k=1}^{p-2} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} a_k\right) X^p = X$$

$$a_1 = 1 \quad ; \quad \forall p \geqslant 2, \quad a_p = (2p-1)a_{p-1} - 2\sum_{k=1}^{p-2} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} a_k$$

$a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 13$; $a_4 = 75$; $a_5 = 541$; $a_6 = 4\,683$; $a_7 = 47\,293$; $a_8 = 545\,835$ $\cdots$
(Nombres de Fubini : suite A000670 de l'OEIS)