Preuve élémentaire de la Conjecture de Collatz
(aussi appelée Conjecture de Syracuse)

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

***

Résumé :

Les variables utilisées dans la preuve sont :
x et (x + V) sont des variables entières positives. (x + V) est le successeur de x.
V est une variable entière d'ajustement, à l'étape initiale $V_0 = 2$ et $x_0 = y_0 > 2$.
Représentation : $x = 2^{\alpha} *(y)$ et $V = 2^{\beta}*(z)$, $\alpha*\beta = 0$, α et β sont des variables entières non négatives, y et z sont des variables entières impaires, y > 0.

L'algorithme de Collatz (3*x + 1) est appliqué **simultanément** à x et (x + V), ainsi on a pour la règle 2 - (3*x + 1) - de l'algorithme et l'ajustement :

$$\mathbf{(x + V) := (2^{\alpha}*(3*y + 1)) + (2^{\beta}*(3*z) - (2^{\alpha} - 1)) = 3(2^{\alpha}*(y)+2^{\beta}*(z))+1} > 0$$

Ce qui donne :

$$x := 2^{\alpha}*(3*y+1) = 2^{\alpha'}*(y'),\ V := 2^{\beta}*(3*z) - (2^{\alpha} -1) = 2^{\beta'}*(z') \quad \mathbf{(1)}$$

0n en déduit la règle :

$$(x := 2^{\alpha}*(3*y + 1))\ \wedge\ (V := 2^{\beta}*(3*z) - (2^{\alpha} - 1)) \implies \mathbf{V < x}$$

Par récurrence on a : $x_{i+1} + V_{i+1} := 3(x_i + V_i) + 1 > 0$ ==> **x + V > 0**

Comme x + V > 0 et V < x, on en déduit la règle :

$$\mathbf{(V < x)\ \wedge\ (x + V > 0) \implies (0 < x + V < 2*x).} \quad (0 < x_i+V_i < 2*x_i)$$

Par hypothèse $S(x_0)$ est une suite de Syracuse, la règle montre que la suite $S(x_0+2)$ est **bornée** car elle est majorée par la suite de Syracuse $S(2*x_0) = 2*S(x_0)$ et minorée par 0.
La **suite bornée $S(x_0+2)$** et la suite de Syracuse $S(2*x_0) = 2*S(x_0)$ - **majoran**t - convergent vers le cycle trivial unique : [4, 2, 1].
Ainsi par récurrence, tout entier positif donne une suite de Syracuse.

***

Conjecture de Collatz (aussi appelée Conjecture de Syracuse)

Algorithme de Collatz :
Soit x un nombre entier positif.
1 - si x est pair alors x := (x/2)
2 - si x est impair alors x := (x * 3 + 1)
On répète 1 - 2 jusqu'à obtenir un cycle (le cycle est-il unique ?) ou bien x tend vers l'infini.
Le cycle [4, 2, 1] est la conjecture de Collatz.
Le symbole := signifie : affecter la valeur de droite à la variable à gauche.

Représentation des variables :

x et $(x + V)$ sont des variables entières positives. $(x + V)$ est le successeur de x.
V est une variable d'ajustement, à la première étape $V_0 = 2$ et $x_0 = y_0 > 2$.
Les variables x et V sont écrites sous la forme :
$x := a(y)$ où $a := 2^{\alpha}$ et $V := b(z)$ où $b := 2^{\beta}$.
α et β sont des variables entières non négatives, tel que $\alpha*\beta = 0$.
y et z sont des variables entières impaires, $y > 0$.
$(x + V) := a*(y) + b*(z) = 2^{\alpha}*(y) + 2^{\beta}*(z)$ et $\alpha*\beta = 0$.

Application de l'algorithme de Collatz :

L'algorithme de Collatz $(3*x + 1)$ est appliqué **simultanément** à x et $(x + V)$.
Le coefficient a étant une puissance de 2, l'algorithme est appliqué à la partie impaire y de x := a*(y) donnant une suite de Syracuse $S(x_0)$ et la partie impaire z de $V := b*(z)$ est multipliée par 3 plus un ajustement.
Dans l'opération $3*x + 1$, $x := a(3*y+1) = a'*(y')$, x est augmenté de $(a - 1)$ à soustraire à V : $V := b*(3*z) - (a-1) = b'*(z')$.
a' et b' sont des puissances de 2, y' et z' sont des variables entières impaires.
Ainsi on a l'égalité
$a*(3*y + 1) + b*(3*z) - (a-1) = a*(3*y) + b*(3*z) + 1 = 3 * (a*(y) + b*(z)) + 1$ >0, **soit $3*(x + V) + 1$, avec x et V d'avant l'opération $3* + 1$, conformément à la règle 2 de l'algorithme.**
La règle 2 et l'ajustement donnent :

$$x := 2^{\alpha}*(3*y+1),\ V := 2^{\beta}*(3*z) - (2^{\alpha} -1) \qquad \mathbf{(2)}$$

0n en déduit la règle :

$$(x := 2^{\alpha}*(3*y + 1)) \wedge (V := 2^{\beta}*(3*z) - (2^{\alpha} - 1)) \Rightarrow \mathbf{V < x}.\ (V_i<x_i)$$

Dans la ligne $a'*(y') + b'*(z')$, a' et b' sont divisées par pgcd(a',b') conformément à la règle 1 de l'algorithme.
Si pgcd(a',b') = 1 alors la division par 2 est différée et l'on a alors :

$$x := 2^{\alpha'}*(y'),\quad V := 2^{\beta'}*(z') \text{ et } \alpha'*\beta' = 0.$$

Evaluation de la variable d'ajustement V :

Lorsque y dans $x := a*(y)$ est multiplié par 3 puis + 1, V est multiplié par 3.
Lorsque x est divisé par 2, V est divisé par 2.
Quand $x = a*(3*y+1)$, x est augmenté de $(a - 1)$, V est diminué de $(a - 1)$.
On en déduit que V est toujours inférieur à x.
On en déduit la régle :

$$\mathbf{(V < x) \Rightarrow (x + V < 2*x)}. \qquad (x_i+V_i < 2*x_i)$$

Par hypothèse $S(x_0)$ est une suite de Syracuse, la règle montre que la suite $S(x_0+2)$ possède une borne supérieure car elle est majorée par la suite de Syracuse $S(2*x_0) = 2*S(x_0)$.

Par récurrence on a : $x_{i+1} + V_{i+1} := 3(x_i + V_i) + 1 > 0$ ==> $\mathbf{x + V > 0}$
Ce qui montre que (x + V) est toujours positif et par conséquent la suite $S(x_0+2)$ possède une borne inférieure car elle est minorée par 0 :

(x + V) > 0

On en déduit la règle :

(V < x) ^ (x + V > 0) ==> (0 < x + V < 2*x). $(0 < x_i+V_i < 2*x_i)$

Conclusion :

La **suite bornée $S(x_0+2)$** et la suite de Syracuse $S(2*x_0) = 2*S(x_0)$ - **majorant** - convergent vers le cycle trivial unique : [4, 2, 1].
Ainsi par récurrence, tout entier positif donne une suite de Syracuse.
**

Génération des suites $S(x_0)$ et $S(x_0 + V_0)$:

Application de l'algorithme de Collatz **simultanément** à x et (x + V) pour générer les suites $S(x_0)$ et $S(x_0 + V_0)$.

Génération des suites de Syracuse S(17) et S(17 + 2) = S(19) :

$x_0 = 17$ et $x_0 + V_0 = 17 + 2 = 19$

S(17) =		S(17 + 2) = S(19) =		
1(**17**) + 2(1)	=	19	=	1(**19**)
1(**52**) + 2(3)	=	58	=	2(**29**)
4(**13**) + 2(3)	=	58	=	2(29)
2(13) + 1(3)	=	29	=	1(29)
2(**40**) + 1(9) - 1	=	88	=	8(**11**)
16(**5**) + 8(1)	=	88	=	8(11)
2(5) + 1(1)	=	11	=	1(11)
2(**16**) + 1(3) - 1	=	34	=	2(**17**)
32(**1**) + 2(1)	=	34	=	2(17)
16(1) + 1(1)	=	17	=	1(17)
16(4) + 1(3) - 15	=	52	=	4(**13**)
64(1) + 4(-3)	=	52	=	4(13)
16(1) + 1(-3)	=	13	=	1(13)
16(4) + 1(-9) - 15	=	40	=	8(**5**)
64(1) + 8(-3)	=	40	=	8(5)
8(1) + 1(-3)	=	5	=	1(5)
8(4) + 1(-9) - 7	=	16	=	16(**1**)
32(1) + 16(-1)	=	16	=	16(1)
2(1) + 1(-1)	=	1	=	1(1)
2(4) + 1(-3) - 1	=	4	=	4(1)
8(1) + 4(-1)	=	4	=	4(1)
2(1) + 1(-1)	=	1	=	1(1)