CONCOURS INTERNE 2021
POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS DE L'INSEE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(durée: 4 heures)

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Tout document ou appareil électronique est interdit.

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes,
chacune comptant pour moitié dans la note finale

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : Algèbre et analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1 :

Rappels et Notations :

— Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, où $n \geqslant 2$

— Tous les polynômes considérés sont à coefficients réels.

— Si f est un endomorphisme de E, on pose $f^0 = Id_E$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

— On dit qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, non nul, est annulateur de f si $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$.

— Un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus degré est égal à 1.

— On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

— On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

— On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Préliminaire

1. Montrer que tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur.
2. Montrer que tout endomorphisme de E possède un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimal. On appelle polynôme minimal de f ce polynôme
3. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de f, alors l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans l'ensemble des racines de P.

Partie 1

4. Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles engendrées par un vecteur propre de f.
5. Soit f un endomorphisme de E non nul et non injectif. Montrer que f possède au moins trois sous-espaces stables et au moins quatre si n est impair.
6. (a) Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles définies sur E.

   (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \mathrm{Ker}\varphi$.
   Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément λ de $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité : $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

   (c) On considère une base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}$. On note A la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et L la matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
   Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :

$$^tA\,^tL = \lambda\,^tL.$$

7. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer $(A - 2I)^3$.

   (b) En déduire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Partie 2

On revient au cas général où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2 et on note P le polynôme minimal de f.

8. Dans cette question, on suppose que le polynôme P possède une racice complexe, non réelle, notée z.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels, noté $X^2 + bX + c$ qui divise P.

   (b) Montrer que l'endomorphisme $f^2 + bf + cId_E$ n'est pas injectif.

   (c) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.
9. Dans cette question, on suppose qu'il existe un réel λ, un réel α non nul et un entier p au moins égal à 2 tels que : $P(X) = \alpha(X - \lambda)^p$.
   On pose $g = f - \lambda Id_E$.

   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $g^{p-1}(x) \neq 0_E$.

   (b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f.
10. Montrer que, plus généralement, pour tout endomorphisme f de E, il existe un plan stable par f.

Exercice 2 :

Le préambule sert pour la 1ère partie de ce problème. Les 2ème et 3ème parties utilisent des résultats de la 1ère partie mais sont indépendantes entre elles.

Préambule

Soient f et g deux fonctions continues de $[a\,,b[$ dans $\mathbb{R}$, où f est à valeurs positives ou nulles, non égale à la fonction nulle. On suppose que : $g(x) \sim f(x)$ $pour\ x \to b$.

Montrer que :

- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *convergente*, alors : $\int_x^b g(t)\,dt \sim \int_x^b f(t)\,dt$ $pour\ x \to b$
- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est *divergente*, alors : $\int_a^x g(t)\,dt \sim \int_a^x f(t)\,dt$ $pour\ x \to b$.

1ère partie

On considère la fonction $f_0 : x > 0 \to f_0(x) = \dfrac{1}{\operatorname{Ln} x}$.

1. Étudier rapidement les variations de cette fonction et tracer l'allure de sa courbe représentative.

2.

   a) Pour quelles valeurs des réels a et b $(0 \le a < b)$ l'intégrale $\int_a^b f_0(t)\,dt$ est-elle définie ?

   b) Même question pour l'intégrale $\int_a^{+\infty} f_0(t)\,dt$.

3. On pose : $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\,dt$. *On ne cherchera pas à donner une expression explicite de* f_1 *au moyen des fonctions usuelles.*

   a) Montrer que : $f_1(x) \sim \dfrac{x}{\operatorname{Ln} x}$ $pour\ x \to 0^+$.

   b) Montrer que : $f_1(x) \sim \operatorname{Ln}|x-1|$ $pour\ x \to 1$.

   c) En déduire la *nature* de l'intégrale $\int_0^1 f_1(t)\,dt$.

4.

   a) Donner une expression explicite de $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ au moyen de f_1 et des fonctions usuelles, sans signe intégrale.

   b) En déduire, en utilisant la question 3, la *valeur* de l'intégrale $\int_0^1 f_1(t)\,dt$.

5.

a) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \left[f_0(t) - \frac{1}{t-1} \right] dt$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{h \to 0^+} \left[\int_0^{1-h} \frac{1}{\text{Ln t}}\, dt + \int_{1+h}^{2} \frac{1}{\text{Ln t}}\, dt \right]$.

2ème partie

On pose : $u_n = n^\alpha \int_0^{n^\beta} \frac{dt}{Ln\ t}$ pour $\alpha\ et\ \beta \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la série $\sum (-1)^n\ u_n$.

6.

a) Pour quelles valeurs de n et de β cette suite $\{u_n\}$ est-elle bien définie ? **On supposera ces conditions vérifiées par la suite.**

b) Sous ces conditions, donner un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$.

7. On suppose $-1 \leq \alpha + \beta < 0$.

a) Montrer, en utilisant des résultats de la 1ère partie, que la suite $\{u_n\}$ est croissante.

b) En déduire la convergence de la série $\sum (-1)^n\ u_n$.

8. Même question dans le cas $\alpha + \beta = 0$.

9. Étudier le comportement de la série $\sum (-1)^n\ u_n$ dans les autres cas.

3ème partie

On définit par récurrence la suite de fonctions $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt$ pour $n \geq 1\ et\ x \in [0,\, 1[$.

10.

a) Calculer les dérivées successives en 0, jusqu'à l'ordre n inclus, de chaque fonction f_n.

b) En déduire une expression de f_n au moyen d'une seule intégrale portant sur des fonctions usuelles.

11. Étudier la convergence de la série $\sum f_n(x)$ et exprimer sous forme d'une intégrale la valeur de sa somme $S(x)$ pour tout réel $x \in [0,\, 1[$.
On montrera que le reste de cette série converge vers 0 pour tout $x \in [0,\, a]$ *et pour tout* $a \in \,]0,\, 1[$.

12. Trouver un équivalent de $S(x)$ quand $x \to 1$.

Partie 2 : Probabilités et Statistiques:

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1 :

On note A, B, C, trois variables aléatoires indépendantes à densité, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On note f_A, f_B, f_C leurs densités respectives.
Pour tout ω appartenant à Ω, on considère le polynôme Q défini par :

$$Q_\omega(x) = A(\omega)x^2 - 2B(\omega)x + C(\omega).$$

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que A est la variable certaine égale à 1.
On a donc $Q_\omega(x) = x^2 - 2B(\omega)x + C(\omega)$ et on s'intéresse à la probabilité p que ce polynôme possède deux racines réelles.

1. On suppose dans cette question que B et C suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) Déterminer une densité de B^2 puis, à l'aide d'un produit de convolution, une densité de $D = B^2 - C$.
   (b) En déduire la valeur de p.
2. On suppose dans cette question que B et C suivent la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Justifier l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(C < B^2) = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{y^2} f_C(t)\mathrm{d}t \right] f_B(y)\mathrm{d}y.$$

   (b) En déduire la valeur de p que l'on exprimera en fonction de Φ, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Partie 2

Dans cette partie, on revient au cas général où A est une variable aléatoire à densité quelconque. On définit la variable aléatoire R par : pour tout ω de Ω, $R(\omega)$ est égal au produit des racines du polynôme Q_ω.

3. On suppose dans cette question que A, B et C suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) On pose $T = \ln\left(\dfrac{C}{A}\right)$.
   À l'aide d'un produit de convolution, montrer qu'une densité de T est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = e^x \int_0^{+\infty} t f_C(te^x) f_A(t)\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire une densité de R.
   (c) La variable R admet-elle une espérance ?
4. On suppose dans cette question que les trois variables A B C admettent la même densité f :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x > 1, \\ \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$$

   On note $f_{A,C}$ la densité conjointe du couple (A, C).
   (a) Déterminer le domaine Δ de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\mathbb{P}(R \leqslant z) = \iint_\Delta f_{A,C}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   (b) En déduire la fonction de répartition de R.
   (c) Déterminer une densité de R.
   (d) La variable R admet-elle une espérance ?

Exercice 2 :

On considère une suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ définies par le modèle **M0** :

$X_0 = 0$

et la relation de récurrence : $X_n = a + b\,n + \theta\,X_{n-1} + U_n$ *pour* $n \geq 1$,

où $\{U_n\}$ est une suite de variables aléatoires *mutuellement indépendantes*, d'espérance nulle et admettant la même variance $\tau^2 > 0$. a, b et θ sont des paramètres réels.
On suppose que : $\boxed{|\theta| \neq 1.}$

1. Montrer que, quel que soit $n \geq 1$, U_n et X_{n-1} sont indépendantes.

2.
   a) Montrer que, quel que soit $n \geq 1$, X_n possède une espérance m_n et une variance σ_n^2.
   b) Établir deux relations de récurrence donnant respectivement l'expression de m_n et celle de σ_n^2.
   c) Dans le cas particulier où les U_n suivent une loi normale, quelle est la loi suivie par les X_n ? *On justifiera soigneusement le raisonnement.*

3. Étude de la suite $\{m_n\}$.
   a) Établir l'expression générale de m_n en fonction des paramètres et de n.
   b) À quelle condition la suite $\left\{\dfrac{m_n}{n}\right\}$ converge-t-elle quand $n \to +\infty$?

4. Étude de la suite $\{\sigma_n^2\}$.
   a) Établir l'expression générale de σ_n^2 en fonction des paramètres et de n.
   b) À quelle condition cette suite converge-t-elle quand $n \to +\infty$?
   c) Lorsque cette dernière condition est vérifiée, établir la convergence en probabilité de la suite $\left\{\dfrac{X_n}{n}\right\}$ quand $n \to +\infty$.

5. On pose : $Z_n = X_n - X_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$.

   a) Écrire le modèle linéaire satisfait par Z_n, qu'on désignera par **M1**. On notera δ_n la perturbation dans ce modèle, ne dépendant que des U_k.
   b) Pour $N \geq 2$, calculer la matrice de variance-covariance du vecteur $\Delta_N = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ . \\ \delta_N \end{pmatrix}$.
   c) Calculer $Cov\left(Z_{n-1}, \delta_n\right)$ pour tout $n \geq 2$.

6. On se place, dans cette question, pour simplifier les calculs, dans le cas où : $\boxed{b = 0.}$ On suppose qu'on dispose des observations $Z_1, \ldots, Z_N$ pour $N \geq 1$.

a) Soit $\hat{\theta}_N^{(1)}$ l'estimateur des moindres carrés ordinaires de θ dans le modèle **M1**. Exprimer $\hat{\theta}_N^{(1)} - \theta$ en fonction seulement des Z_n et δ_n.

b) Calculer EZ_n^2 pour $n \geq 1$.

c) En admettant qu'on puisse approximer et remplacer dans la suite des calculs $\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} Z_n^2$ par $E\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1} Z_n^2\right)$, lorsque $N \to +\infty$, et *en se plaçant dans le cas du 4.b*, montrer que l'estimateur $\hat{\theta}_N^{(1)}$ est asymptotiquement biaisé.

d) Comment peut-on transformer cet estimateur $\hat{\theta}_N^{(1)}$ pour construire un nouvel estimateur de θ asymptotiquement non biaisé ?

7. On revient au modèle initial **M0**. On se place, dans cette question, pour simplifier les calculs, dans le cas où : $\boxed{a = 0.}$

On pose : $A_n(\theta) = X_n - \theta X_{n-1} = b\, n + U_n \;\; pour \;\; n \geq 1.$

a) Supposant tout d'abord θ connu, on note $\hat{b}_N^{(0)}$ l'estimateur des moindres carrés ordinaires de b en fonction des $A_n(\theta)$ lorsqu'on dispose des observations pour $n = 1, \ldots, N$. Exprimer $\hat{b}_N^{(0)} - b$ en fonction des U_n. On note $\hat{U}_n^{(0)}$ les résidus estimés qui en résultent dans ce modèle.

b) On estime ensuite θ en minimisant $\sum_{n=1}^{N} [\hat{U}_n^{(0)}]^2$. Déterminer cet estimateur, noté $\hat{\theta}_N^{(0)}$.

c) Exprimer $\hat{\theta}_N^{(0)} - \theta$ en fonction de $\hat{b}_N^{(0)} - b$ ainsi que des X_n et des U_n.

On pourra poser : $S_N = \sum_{n=1}^{N} n\, X_{n-1}$.

d) Montrer que la suite $\{\hat{b}_N^{(0)}\}$ converge en probabilité vers b quand $N \to +\infty$.

e) **Sous l'hypothèse de normalité des** U_n, examiner la convergence en loi de la suite $\{N^{3/2}(\hat{b}_N^{(0)} - b)\}$ quand $N \to +\infty$.