Fonctions absolument monotones

Définition : soit a et b deux éléments de la droite numérique achevée, où $a < b$, et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$ (*i.e.* un élément de $\mathcal{C}^\infty(]a,b[)$). La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in]a,b[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A – Généralités

A.1 Montrer que toute application absolument monotone est positive et croissante. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante.

A.2 Soit f et g deux fonctions absolument monotones sur $]a,b[$. Montrer que $f+g$ et fg sont absolument monotones.

A.3 Montrer que si f est absolument monotone sur $]a,b[$, alors e^f est absolument monotone sur $]a,b[$.
Indication : on pourra effectuer une récurrence forte.

Partie B – La fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$

B.1 On considère l'application

$$g : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) \end{array}.$$

a Calculer les dérivées successives de g.
b Montrer que g est absolument monotone sur $]0,1[$.

B.2 Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

est absolument monotone sur $]0,1[$.
Indication : on pourra considérer $h = \ln(f)$ et calculer h'.

B.3 Montrer que l'application arcsinus est absolument monotone sur $]0,1[$.

Partie C – Prolongement d'une application absolument monotone

On suppose ici a réel, et f absolument monotone sur $]a,b[$.

C.1 Montrer que f est prolongeable par continuité en a en $\tilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$, que ce prolongement est dérivable en a, et que $\tilde{f}'(a) \geqslant 0$.

C.2 Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b[$, et que toutes ses dérivées sont positives ou nulles en a.

C.3 Montrer que même dans le cas où b est fini, f n'est pas nécessairement prolongeable par continuité en b.

Partie D – Une caractérisation des applications absolument monotones

Étant donné un réel h, on définit les applications

$$t_h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+h \end{array}, \quad T_h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{R} \\ f & \mapsto & f \circ t_h \end{array}, \quad \text{et} \quad \Delta_h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{R} \\ f & \mapsto & T_h(f) - f \end{array}.$$

D.1 Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$, T_h et Δ_h sont des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Montrer que T_h est un automorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. L'endomorphisme Δ_h est-il injectif ?

Dans la suite, h désigne un réel strictement positif.

Notation : pour tout entier naturel n, Δ_h^n désignera la composée n fois de Δ_h. Par exemple, $\Delta_h^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$ et $\Delta_h^3 = \Delta_h \circ \Delta_h \circ \Delta_h$.

D.2 Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. Donner $\Delta_h^2(f)(x)$ en fonction de $f(x+2h)$, $f(x+h)$ et $f(x)$.

D.3 Montrer, pour tout entier naturel n, tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, tout $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, et tout réel x, la formule :

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh).$$

Définition : soit $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. On dit que f est *totalement monotone* si pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout réel x, $\Delta_h^n(f)(x) \geqslant 0$.

D.4 On souhaite montrer que toute application absolument monotone sur $\mathbb{R}$ est totalement monotone.

a Soit f une application absolument monotone sur $\mathbb{R}$, et x un réel. Pour tout entier naturel n, on définit l'application :

$$X_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \Delta_h^n(f)(x) \end{array}$$

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$X'_{n+1}(h) = (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h).$$

b Montrer que si $\Delta_h^n(f') \geqslant 0$, alors $\Delta_h^{n+1}(f) \geqslant 0$.

c Montrer que toute application absolument monotone est totalement monotone.

D.5 On souhaite montrer que toute application totalement monotone est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

a Montrer que toute fonction totalement monotone est positive et croissante.

b Pour tout entier naturel non nul n, on définit l'application

$$\psi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (e^t-1)^n \end{array}$$

On convient que ψ_0 est la fonction constante de valeur 1 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel non nul n, donner une combinaison linéaire non triviale à résultat nul de la famille $(\psi'_n, \psi_n, \psi_{n-1})$ de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

c Montrer que, pour tout entier naturel n, $\psi_n^{(k)}(0) = 0$ si $0 \leqslant k < n$, et que $\psi_n^{(n)}(0) = n!$.

d Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $j \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$S_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j.$$

Montrer que S_j vaut 0 si $0 \leqslant j < n$, et que S_n vaut $n!$.

Indication : on pourra utiliser la question précédente, et calculer autrement les dérivées en 0 de ψ_n, jusqu'à l'ordre n.

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange (ne pas la redémontrer) :

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(b-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

e En utilisant cette formule et D.3, montrer que toute fonction totalement monotone est absolument monotone.