$a_1 = m\, a_0$, quand x tend vers 0 à gauche ; montrer que, pour $x < 0$:

$$f(x) \geqslant a_0\, e^{mx}$$

IV

Pour traiter cette dernière partie, on pourra utiliser les deux résultats suivants, dont on ne demande pas la démonstration :

a) Soit une suite de fonctions réelles $\varphi_1, \varphi_2, \dots , \varphi_n, \dots$ définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$, croissantes sur cet intervalle et satisfaisant à :

$$0 \leqslant \varphi_n(u) \leqslant M \quad \text{pour} \quad u \geqslant 0 \ , \quad n \geqslant 1$$

M étant indépendant de n .

Alors, on peut extraire de la suite $\{\varphi_n\}$ une suite qui converge sur $[0,+\infty[$ vers une fonction croissante φ .

b) Soit une suite de fonctions $h_1, h_2, \dots , h_n, \dots$ définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et dont chacune est bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$.

On suppose que la suite $\{h_n\}$ converge sur $[0,+\infty[$ vers une fonction h , elle aussi bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$. On suppose en outre que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $u \geqslant 0$:

$$|h_n(u)| \leqslant H(u)$$

où H est une fonction positive, bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[0,A]$, et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} H(u)\, du$ existe.

Alors, quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} h_n(u)\, du$ tend vers $\int_0^{+\infty} h(u)\, du$.

1°) On suppose que f est une fonction A.M. sur $]-\infty,0[$ et qu'elle est bornée supérieurement sur cet intervalle.

Montrer que, quel que soit $n \geqslant 1$, on a, pour $x < 0$:

$$f(x) = f(-\infty) + \int_0^{+\infty} \phi_n(-xu)\, \varphi_n'(u)\, du$$

où ϕ_n est la fonction considérée dans la question préliminaire et :

$$\varphi_n(u) = f(-\infty) + \frac{1}{n!} \int_{\frac{n}{u}}^{+\infty} t^n\, f^{(n+1)}(-t)\, dt$$

Montrer qu'il existe une fonction φ croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$, positive et bornée supérieurement sur cet intervalle, telle que, pour $x < 0$:

$$f(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{xu}\varphi(u)\,du$$

On ne demande pas d'examiner la question de l'unicité de la fonction .

2°) Inversement, φ étant une fonction positive, croissante et bornée supérieurement sur l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction f définie pour $x<0$ par :

$$f(x) = -x \int_0^{+\infty} e^{xu}\varphi(u)\,du$$

est-elle A.M. sur $]-\infty,0[$ et bornée supérieurement sur cet intervalle ?

(Agrégation 1964)
