CONCOURS INTERNE 2019

POUR LE RECRUTEMENT D'ADMINISTRATEURS STAGIAIRES DE L'INSEE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

(durée : 4 heures)

La composition comporte 6 pages :

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Les exercices sont indépendants et sont tous à traiter.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Vous composerez pour chacune de ces deux parties sur une copie séparée.

Concours administrateur Insee interne 2019

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes, chacune comptant pour moitié dans la note finale.

Partie 1 : analyse-algèbre

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Rappels et notations

- Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
- Toutes les matrices sont supposées être des matrices réelles.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices carrées de taille n.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.
- La trace d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{tr}(A)$.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.
- On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geqslant 0 \text{ (respectivement : } \forall X \neq 0, \quad {}^tXAX > 0 \text{)}$$

- Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.
- On rappelle le théorème spectral : toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable dans le groupe orthogonal, c'est-à-dire que, si M est symétrique réelle, il existe une matrice D diagonale réelle et une matrice P orthogonale telle que $M = PD{}^tP$.
- On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une relation d'ordre si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

  i $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.

  ii $\forall (x,y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Longrightarrow x = y$.

  iii $\forall (x,y,z)\ E^3, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

Partie 1 - Propriétés de $S_n^+(\mathbb{R})$

1. Soit M une matrice symétrique d'ordre n.
   (a) Montrer que, si M appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$), alors les valeurs propres de M sont positives (respectivement strictement positives).
   (b) Réciproquement, montrer que, si une matrice symétrique a ses valeurs propres positives (respectivement strictement positives), alors elle appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$).
2. Soit M une matrice symétrique réelle et $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.
   On note $\|X\|$ la norme euclidienne d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$.
   Établir, pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'encadrement suivant :

$$\lambda_1\|X\|^2 \leqslant {}^tXMX \leqslant \lambda_n\|X\|^2$$

3. Soit A une matrice de S_n^{++}. On appelle racine carrée de A toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $B^2 = A$.
   (a) Montrer que A admet au moins une racine carrée appartenant à S_n^{++}.
   (b) Soit B et C deux racines carrées de A appartenant à S_n^{++}.
      i. Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ à termes diagonaux strictement positifs, telles que : $A = PD^2\,{}^tP = Q\Delta^2\,{}^tQ$.
      ii. En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2 R$.
      iii. Établir l'égalité $RD = \Delta R$.
      iv. Conclure que A possède une unique racine carrée appartenant à S_n^{++}.

Partie 2 - Une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$

4. On définit sur $S_n(\mathbb{R})$ la relation $\prec$ par :

$$\forall (A,B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2, \quad A \prec B \Longleftrightarrow B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

Montrer que cette relation est une relation d'ordre.

5. Soit A une matrice de S_n^{++}.
Établir l'implication suivante :

$$A \prec I \Longrightarrow I \prec A^{-1}$$

6. (a) Montrer que l'application suivante de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall (M,N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$$

On note $\|.\|_2$ la norme associée définie sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Soit A une matrice symétrique réelle. Calculer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de A.

(c) Soit F une partie de $S_n(\mathbb{R})$ majorée par A et minorée par B, au sens de la relation $\prec$.
Montrer que F est une partie bornée de $S_n(\mathbb{R})$ au sens de la norme $\|.\|_2$.

(d) Réciproquement, soit F une partie de $S_n(\mathbb{R})$ bornée au, au sens de la norme $\|.\|_2$, par $K > 0$.
Établir, pour tout élément M de F, l'encadrement suivant : $-KI_n \prec M \prec KI_n$.

Exercice 2

Avertissement : les seules relations de comparaison ou de « croissance comparée » autorisées sont les comportements, pour $\gamma > 0$, de $\dfrac{\ln x}{x^\gamma}$ en $+\infty$ et de $x^\gamma \ln x$ en 0. Toute autre relation utilisée par le candidat devra être démontrée.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

Soit a et μ deux réels vérifiant $a > 0$ et $\mu \geqslant 1$.
On considère une suite (u_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} an^\mu$.
On cherche à étudier, pour $x \in]0,1[$, le comportement de la série de terme général x^{u_n}.

1. Montrer directement (au moyen de comparaisons adéquates) que cette série converge.

2. (a) Établir, pour tout t appartenant à $]0,1[$ et tout réel m strictement positif, l'inégalité suivante :

$$(1-t)t^m < \frac{1}{m}$$

(b) En déduire, pour $x \in]0,1[$ et $\mu > 1$, une nouvelle démonstration de la convergence de la série de terme général x^{u_n}.

3. (a) Toujours dans le cas $\mu > 1$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \left[(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{u_n}\right] = 0$.
On pourra chercher une majoration de $(1-x)^\delta x^{u_n}$ par le terme général d'une série convergente indépendante de x, pour des valeurs adéquates de δ, de manière à obtenir une majoration de $(1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{u_n}$.

(b) Montrer que ce dernier résultat ne tient plus si l'on prend $\mu = 1$.

Partie 2

4. Pour $\beta > 0$, on pose $I(\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^\beta}\mathrm{d}v$.

(a) Vérifier que cette intégrale est bien définie.

(b) Calculer $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $I(2)$.

5. Pour α, β, et $x > 0$ réels, on pose $a_n(x) = x^{\alpha n^\beta}$.

(a) Pour quelles valeurs de α, β, $x>0$ la suite $(a_n(x))$ converge-t-elle vers 0 quand n tend vers $+\infty$?

(b) Pour ces valeurs, montrer que la série de terme général $a_n(x)$ est convergente.

Dans la suite, on se place dans le cas où les conditions du 5 sont satifaites.

6. On pose, pour $t>0$ et $x>0$, $f(x,t)=x^{\alpha t^\beta}$.

   (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
   $$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} a_k(x) - \int_n^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \leqslant a_n(x)$$
   On justifiera soigneusement l'existence de l'intégrale considérée.

   (b) Démontrer la relation : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t + 1.$

   (c) Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ quand x tend vers 1, en puissance de $x-1$ et s'exprimant au moyen des intégrales $I(\beta)$ de la question 4.

   (d) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x)$ quand x tend vers 1.
   On justifiera avec soin la réponse.

   (e) Exemple : trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k^2}$ quand x tend vers 1.

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On pose alors : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Partie 1

On suppose dans cette partie que les (X_k) suivent toutes la même loi.

1. Dans cette question, on suppose de plus que les variables X_k admettent une espérance m et une variance $\sigma^2 (\sigma>0)$.
   On pose, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x :
   $$p_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant x\right)$$

   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(m)$.

   (b) En utilisant une convergence en probabilité, établir les deux résultats suivants :

      i. $\forall x>m, \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(x)=1.$

      ii. $\forall x<m, \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(x)=0.$

2. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et suivant toutes la loi normale centrée réduite.
   On définit, pour tout entier naturel n, l'application X_n par :
   $$\forall \omega\in\Omega, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_n^2(\omega)} & \text{si } T_n(\omega)\neq 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$
   On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est bien une variable aléatoire.

(a) Montrer que X_n est une variable à densité et donner une densité de X_n.

(b) Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_n)$.

3. (a) On considère $t_1, \dots, t_n$ n réels strictement positifs.
Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i^2}$$

(b) Calculer, pour tout réel x strictement positif :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant x\right)$$

Partie 2

4. On suppose dans cette partie que, pour tout entier naturel n non nul, on a $X_n(\Omega) = \{0, n\}$ et que la loi de probabilité de X_n est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{1}{n} \\ \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

(a) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

(b) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

(c) i. Établir, pour tout réel x positif, l'inégalité suivante : $1 - x \leqslant e^{-x}$.

ii. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \geqslant \frac{1}{2}$.

iii. Montrer que : $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{2n} [X_k = k]\right) \leqslant \mathbb{P}\left([\overline{X}_{2n} \geqslant \frac{1}{2}]\right)$.

iv. En déduire que : $\displaystyle\mathbb{P}\left([\overline{X}_{2n} \geqslant \frac{1}{2}]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(d) Montrer que la suite $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

Exercice 2

Préambule

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]0,1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Soit ℓ sa limite, que l'on écrira sous la forme de *produit infini* : $\ell = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} u_k$.
2. Montrer que si, $\ell \neq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1.
3. Étudier la réciproque. *On discutera en fonction du comportement de la série de terme général* $1 - u_n$.
4. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. On pose $p_1 = 1 - u_1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $p_n = (1 - u_n)q_{n-1}$.

   (a) Montrer que la série de terme général p_n est convergente.

   (b) Discuter des valeurs de sa somme en fonction du comportement de la série de terme général $1 - u_n$.

Application : un placement risqué

Un joueur en bourse effectue un placement initial dont les conditions sont les suivantes : pour un achat d'une d'action au cours unitaire 1 à l'instant initial 0, il récupère l'année suivante la valeur de l'action si celle-ci a progressé du taux τ (*taux de référence* fixé par l'emetteur du placement), sinon il attend l'année 2 ; si, à cette date, l'action, par rapport à son cours initial, a progressé du taux 2τ, il en récupère la valeur, sinon, il attend l'année 3 et ainsi de suite.

On formalise comme suit le fonctionnement de ce placement :

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, caractérisée par sa fonction de répartition, définie par $F(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$, supposée continue, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}_+$. La variable X_n représente le cours de l'action à l'instant n. On pose par convention $\boxed{X_0 = 1}$.

On définit une nouvelle variable aléatoire N à valeurs entières définie comme suit :

$$\begin{cases} N = 1 \Leftrightarrow X_1 \geqslant 1+\tau \\ N = 2 \Leftrightarrow X_1 < 1+\tau \text{ et } X_2 \geqslant 1+2\tau \\ \vdots \\ N = n \Leftrightarrow X_1 < 1+\tau,\ X_2 < 1+2\tau, \dots, X_{n-1} < 1+(n-1)\tau \text{ et } X_n \geqslant 1+n\tau \\ \vdots \end{cases}$$

Cette variable N représente l'instant de sortie du placement et de récupération de la valeur correspondante de l'action.

5. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}([N = n])$.
   (b) Est-il possible que le joueur ne sorte jamais du placement ni ne récupère la valeur correspondante de l'action ? Dans ce cas, on notera par convention $N = +\infty$.
   Écrire la probabilité de cet événement sous la forme d'un produit infini.
   (c) Étudier la réponse à la question 5.(b) dans les cas particuliers suivants :
      i. α est un réel strictement positif et, pour $x \geqslant 0$: $F(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^\alpha}$.
      ii. La loi des X_n est la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (d) Répondre aux questions 5.(a) et 5.(b) dans la cas particulier où, pour tout x positif ou nul : $F(x) = 1 - \dfrac{\tau}{x+\tau}$.
6. On note Y la variable aléatoire mesurant le gain nominal[1] obtenu, qu'on peut écrire sous la forme $Y = X_N - 1$, avec la convention $Y = -1$ si $N = +\infty$. Déterminer la loi de Y en calculant sa fonction de répartition, $\mathbb{P}([Y \leqslant y])$, que l'on exprimera sous forme sommatoire.

1. On suppose qu'il n'y a pas de *taux d'actualisation* ou que celui-ci est nul.