

# Liste des sujets d'oral

Agrégation interne de mathématiques

Session 2024

## Leçons d'algèbre et géométrie

- 101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
- 103 Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.
- 104 Structures quotients, exemples et applications.
- 105 Nombres premiers. Propriétés et applications.
- 106 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
- 107 PGCD dans  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$  où  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Applications.
- 108 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes. On supposera les généralités sur les anneaux de polynômes connues.
- 109 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines. Applications.
- 110 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
- 111 Formes linéaires, hyperplans, dualité en dimension finie. Exemples.
- 112 Déterminants. Applications.
- 113 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
- 114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
- 115 Diverses factorisations de matrices. Applications.
- 116 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
- 117 Valeurs propres et vecteurs propres. Recherche et utilisation.
- 118 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
- 119 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
- 120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
- 121 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
- 122 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.
- 123 Groupe linéaire  $GL(E)$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Sous-groupes. Applications.
- 124 Barycentres. Applications.
- 125 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.

- 126 Espaces préhilbertiens réels. Orthogonalité, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Applications.
- 127 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications aux coniques.
- 128 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
- 129 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
- 130 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
- 131 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 132 Utilisation de groupes en géométrie.
- 133 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

## Leçons d'analyse et probabilités

- 201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.
- 202 Séries à termes réels positifs. Applications.
- 203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
- 204 Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
- 205 écriture décimale d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.
- 206 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
- 207 Théorèmes des accroissements finis. Applications.
- 208 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 209 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 210 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
- 211 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
- 212 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 213 Série de Fourier d'une fonction périodique. Propriétés de la somme. Exemples.
- 214 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.
- 215 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbb{R}$  (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
- 216 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 217 équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a, b, c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.
- 218 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
- 219 Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
- 220 Étude des courbes planes.
- 221 Parties compactes de  $\mathbb{R}^n$ . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
- 222 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe  $C^1$ . Exemples.

- 223** Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
- 224** Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
- 225** Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
- 226** Suites dans un espace vectoriel normé.
- 227** Théorèmes de points fixes.
- 228** Espérance, variance. Applications.
- 229** Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 230** Conditionnement et indépendance en probabilités. Exemples.
- 231** Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
- 232** Loi normale en probabilités et statistiques.
- 233** Couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.

## Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

- 301** Exercices sur les groupes.
- 302** Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.
- 303** Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
- 304** Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ .
- 305** Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM, dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,...
- 306** Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
- 307** Exercices utilisant les corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .
- 308** Exercices sur les polynômes et les fractions rationnelles.
- 309** Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 310** Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 311** Exercices faisant intervenir des changements de base en algèbre linéaire et bilinéaire.
- 312** Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
- 313** Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
- 314** Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
- 315** Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Aspects algorithmiques.
- 316** Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
- 317** Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
- 318** Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
- 319** Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
- 320** Exercices illustrant l'utilisation de décompositions de matrices.
- 321** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
- 322** Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** Exercices sur les coniques.
- 324** Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.

- 325** Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
- 326** Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
- 327** Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
- 328** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- 329** Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.

## Exemples et exercices d'analyse et probabilités

- 401** Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
- 402** Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence ou de façon implicite.
- 403** Exemples de séries à termes réels ou complexes absolument convergentes et semi-convergentes.
- 404** Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 405** Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 406** Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Estimation de l'erreur.
- 407** Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
- 408** Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
- 409** Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 410** Exercices sur les séries entières et leurs applications.
- 411** Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 412** Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 413** Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.
- 414** Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 415** Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 416** Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
- 417** Exemples d'étude d'intégrales généralisées.
- 418** Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes...
- 419** Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
- 420** Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 421** Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
- 422** Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 423** Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.
- 424** Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 425** Exercices utilisant des probabilités conditionnelles et la notion d'indépendance.

- 426** Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 427** Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
- 428** Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.
- 429** Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
- 430** Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations  $F(x) = 0$ .
- 431** Exemples d'équations fonctionnelles.
- 432** Exemples d'applications de la notion de compacité.
- 433** Exemples d'utilisation d'inégalités classiques en analyse et en probabilités.
- 434** Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.