Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations et vocabulaire

Pour chaque nombre q qui est une puissance d'un nombre premier, on note $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments.

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $|X|$.

Si a et b sont deux entiers, on définit

$$[\![a, b]\!] = \begin{cases} \{a, a+1, \ldots, b\} & \text{si } a \leqslant b, \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est notée $\dim E$. Le noyau et l'image d'une application linéaire u sont respectivement notés $\ker u$ et $\operatorname{im} u$. On note $\operatorname{End}(E)$ l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E, id_E l'identité de E, et $\mathbf{GL}(E)$ le groupe des éléments inversibles de $\operatorname{End}(E)$.

Soient un entier naturel n et un corps $\mathbb{K}$.
La notation $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note I_n la matrice unité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. Une matrice carrée est dite symétrique si elle est égale à sa transposée. On pose :

$$\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM = M^{-1}\}.$$

C'est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$, ce qu'on ne demande pas de justifier.

Lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble E, les parties de E qui sont des orbites pour l'opération de G sont appelées des *G-orbites*.

Exercice 1

1. Soit n un entier strictement positif. Démontrer que pour chaque diviseur positif d de n, le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède un unique sous-groupe d'ordre d.
2. Soit q un entier naturel impair. On considère $G = (\mathbb{Z}/(4q)\mathbb{Z})^*$, le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/(4q)\mathbb{Z}$.
   a) Déterminer les ordres respectifs dans G des classes modulo $4q$ de $2q-1$ et de $2q+1$.
   b) Le groupe G est-il cyclique ?

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ tels que $x^2 + y^2 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - 5y^2 = 33$.
3. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) dans $\mathbb{Q}^2$ tels que $x^2 - 5y^2 = 33$.

Exercice 3

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. On note $(\ ,\ )_E$ le produit scalaire de E et $(\ ,\ )_F$ celui de F. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Soit y dans F. Démontrer qu'il existe un unique vecteur z dans E tel que
$$(z, x)_E = (y, u(x))_F$$
pour tout x dans E.
2. En déduire qu'il existe une et une seule application $u^* : F \to E$ telle que
$$(u^*(y), x)_E = (y, u(x))_F$$
pour tout (x, y) dans $E \times F$. Justifier que u^* est linéaire.

Problème

Partie I

Notations et vocabulaire. Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. On note $(\ ,\ )_E$ le produit scalaire de E et $(\ ,\ )_F$ celui de F. On pose $m = \dim F$ et $n = \dim E$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. L'application u^* définie dans l'exercice 3 est appelée *adjoint* de u. Cette définition généralise la notion d'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien au cas d'une application linéaire entre deux espaces euclidiens.
On admet sans justification les propriétés suivantes :

— si G est un troisième espace vectoriel euclidien et si $v : F \to G$ est une application linéaire, alors $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$,

— l'application u est l'adjoint de u^*, autrement dit $u = (u^*)^*$.

— pour tout x dans E, on a

$$((u^* \circ u)(x), x)_E = (u(x), u(x))_F \geqslant 0.$$

— les composées $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont des endomorphismes auto-adjoints de E et F, respectivement.

Pour tout nombre réel λ, on pose :

— $E_\lambda = \ker(u^* \circ u - \lambda \, \mathrm{id}_E)$,

— $F_\lambda = \ker(u \circ u^* - \lambda \, \mathrm{id}_F)$.

L'ensemble E_λ est un sous-espace vectoriel de E et hérite par restriction du produit scalaire de E une structure d'espace vectoriel euclidien. De façon similaire, F_λ est un sous-espace vectoriel de F et en hérite une structure d'espace vectoriel euclidien.

1. Démontrer que $\ker(u^* \circ u) = \ker u$.
2. Démontrer que les valeurs propres de $u^* \circ u$ et de $u \circ u^*$ sont des nombres réels positifs.
3. Soit λ un nombre réel strictement positif. Vérifier que $u(E_\lambda) \subset F_\lambda$ et que $u^*(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

Pour tout nombre réel strictement positif λ, on note $u_\lambda : E_\lambda \to F_\lambda$ l'application linéaire induite par u.

4. Soit λ un nombre réel strictement positif. Démontrer que $\dim E_\lambda = \dim F_\lambda$ et que $u_\lambda/\sqrt{\lambda}$ est une isométrie de E_λ sur F_λ.
5. On note λ_1, λ_2, ..., λ_r les valeurs propres non-nulles de $u^* \circ u$, répétées selon leurs multiplicités. Établir l'existence de bases orthonormées $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ de E et F, respectivement, telles que

$$u(e_i) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i}\, f_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0 & \text{si } r+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

6. Soit M une matrice à m lignes et n colonnes et à coefficients réels et soit r le rang de M.
   a) Démontrer l'existence d'une suite décroissante $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ de réels strictement positifs et de matrices orthogonales P et Q, $P \in \mathbf{O}_m(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, telles que $M = PDQ$, où D est la matrice dont les coefficients $d_{i,j}$ sont donnés par

$$d_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } 1 \leqslant i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   b) On suppose que $m = n$ et que M est inversible. Dans le contexte et avec les notations de la question a), démontrer que le produit PQ ne dépend que de M et non de la factorisation $M = PDQ$ utilisée.
   Indication : on pourra examiner la décomposition polaire de M.

Partie II

Dans cette partie, on se place sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et on se donne un entier $n \geqslant 1$. On note $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de carré nul.
Pour chaque entier naturel r tel que $2r \leqslant n$ et chaque suite décroissante $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ de réels strictement positifs, on note $K_{r,\sigma}$ la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients $k_{i,j}$ sont donnés par

$$k_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ et } j = r + i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice ${}^tK_{r,\sigma}\, K_{r,\sigma}$ est diagonale. La suite de ses coefficients diagonaux comporte d'abord r zéros, puis σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_r^2, et enfin $n - 2r$ zéros.

7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit r le rang de u. Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ soit une base de $\operatorname{im} u$.
8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$. Démontrer que le rang r de u vérifie $2r \leqslant n$.
9. Soit M dans $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ et soit r le rang de M.
   a) Démontrer l'existence d'une matrice P dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telle que PMP^{-1} soit de la forme

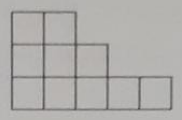
   $$\left(\begin{array}{c|c} \overset{r}{0} & \overset{n-r}{B} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

   où B est une matrice à r lignes et $n - r$ colonnes et où les deux blocs diagonaux sont les matrices carrées nulles d'ordre r et $n - r$.

   b) Démontrer l'existence d'une suite décroissante $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$ de réels strictement positifs et d'une matrice Q dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $QMQ^{-1} = K_{r,\sigma}$.
   Indication : on pourra appliquer à la matrice B les résultats de la partie I.
10. On définit une action du groupe $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble $\mathscr{E}_n(\mathbb{R})$ par $P \cdot M = PMP^{-1}$ pour (P, M) dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{E}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que chaque orbite contient une unique matrice de la forme $K_{r,\sigma}$.

Définitions et notations concernant les partitions.
Soient n et ℓ des entiers naturels. Une *partition* de n de *longueur* ℓ est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\ell)$ de ℓ entiers naturels non nuls telle que $n = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$. On note $|\lambda| = n$. Les termes de cette suite sont appelés les *parts* de la partition λ (par convention, l'indexation commence à 1). Par commodité d'écriture, on étend la notion de part de la partition λ aux indices strictement supérieurs à ℓ en posant $\lambda_i = 0$, pour tout entier $i > \ell$. Par convention, on note $\varnothing$ l'unique partition de longueur 0 de l'entier 0.
Ainsi, si l'on désigne par $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des partitions de l'entier n, alors $\mathscr{P}_0 = \{\varnothing\}$, $\mathscr{P}_1 = \{(1)\}$, $\mathscr{P}_2 = \{(2), (1,1)\}$, $\mathscr{P}_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$,
$\mathscr{P}_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$, etc.
Un élément d'un ensemble $\mathscr{P}_n$, pour un entier n non précisé, est simplement appelé *partition*.

Il est commode de représenter graphiquement une partition λ par son *diagramme de Ferrers* : chaque part non nulle de λ est visualisée par une ligne de boîtes, les différentes lignes étant empilées de bas en haut et alignées à gauche. Par exemple, le diagramme de Ferrers de la partition de 10 de longueur 3, $(5,3,2)$, est représenté ci-dessous.



On remarque que le nombre de lignes du diagramme de Ferrers de la partition λ est la longueur de λ.

La réflexion selon la bissectrice du premier quadrant (représentée en pointillé ci-dessous) envoie le diagramme de Ferrers d'une partition λ sur le diagramme de Ferrers d'une autre partition, appelée partition *conjuguée* de λ, de longueur λ_1 et notée λ'. On admet qu'il s'agit bien d'une partition.

La figure de droite ci-dessus présente le résultat de cette opération de conjugaison lorsqu'on l'applique à la partition $(5,3,2)$: on obtient $(3,3,2,1,1)$. Les candidats pourront vérifier que la conjuguée de la partition (4) est $(1,1,1,1)$ et que la partition $(3,2,1)$ est égale à sa conjuguée. La conjugaison des partitions d'un même entier n est une opération involutive : pour toute partition λ, on a $(\lambda')' = \lambda$ et $|\lambda'| = |\lambda|$. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, la i-ième part λ'_i de λ' est égale au nombre de parts de λ supérieures ou égales à i ; en particulier, λ'_1 est la longueur de λ. Ces propriétés sont admises et pourront être utilisées sans justification dans la suite du problème.

Pour chaque entier strictement positif d, on note $\widetilde{J}_d$ la matrice carrée d'ordre d avec des zéros partout sauf sur la première sous-diagonale, où l'on met des 1. Par exemple,

$$\widetilde{J}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

À une partition λ, on associe la matrice J_λ diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux successifs $\widetilde{J}_{\lambda_1}$, $\widetilde{J}_{\lambda_2}$, ... Par exemple,

$$J_{(4,2,1)} = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La matrice $\widetilde{J}_d$ (respectivement, J_λ) peut être considérée comme appartenant à $\mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ (respectivement, $\mathscr{M}_{|\lambda|}(\mathbb{K})$) quel que soit le corps $\mathbb{K}$.

Partie III

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme *nilpotent* de E.

Si x est un élément de E, on note $\langle x \rangle_u$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments x, $u(x)$, $u^2(x)$, ... et on définit la *hauteur* de x comme l'entier $h \geqslant 0$ tel que $u^i(x) \neq 0$ si $0 \leqslant i < h$ et $u^i(x) = 0$ si $i \geqslant h$. Ainsi le vecteur nul est de hauteur 0 et la hauteur d'un vecteur non nul est strictement positive.

11. Soit x un élément non nul de E. On note h la hauteur de x.
    a) Démontrer que $(x, u(x), \ldots, u^{h-1}(x))$ est une base de $\langle x \rangle_u$.
    b) Démontrer que $\langle x \rangle_u \cap \ker u$ est une droite vectorielle et donner un vecteur générateur de cette droite.
12. On suppose ici qu'il existe une suite finie $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ d'éléments non nuls de $\operatorname{im} u$ telle que $\operatorname{im} u$ soit la somme directe $\langle z_1 \rangle_u \oplus \langle z_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m \rangle_u$, et pour chaque $i \in [1, m]$, on choisit $y_i \in E$ tel que $u(y_i) = z_i$. On note F la somme $\langle y_1 \rangle_u + \langle y_2 \rangle_u + \cdots + \langle y_m \rangle_u$ et G un supplémentaire de $F \cap \ker u$ dans $\ker u$. On pose $\ell = m + \dim G$.
    a) Démontrer que la somme $\langle y_1 \rangle_u + \langle y_2 \rangle_u + \cdots + \langle y_m \rangle_u$ est directe.
    Indication : On pourra vérifier que $u(\langle y_i \rangle_u) \subset \langle z_i \rangle_u$, pour tout $i \in [1, m]$, puis exploiter ce fait.
    b) Justifier que $u(F) = \operatorname{im} u$.
    c) Démontrer que $E = F \oplus G$.
    d) Établir l'existence d'une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que E soit la somme directe $\langle x_1 \rangle_u \oplus \langle x_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$.
13. Établir l'existence d'une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de E telle que E soit la somme directe $\langle x_1 \rangle_u \oplus \langle x_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$. On effectuera une démonstration par récurrence que l'on rédigera avec soin.

Étant donnée une partition λ, de longueur ℓ, on dit que (E, u) est de *type* λ s'il existe une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de E telle que chaque x_i soit de hauteur λ_i et E soit la somme directe $\langle x_1 \rangle_u \oplus \langle x_2 \rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell \rangle_u$.

14. a) Soit λ une partition. Démontrer que (E, u) est de type λ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice J_λ.
    b) Soit λ une partition. On suppose que (E, u) est de type λ. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, exprimer $\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1})$ en fonction de i et des parts λ'_1, λ'_2, ... de la partition conjuguée de λ.
    Remarque : on rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$.
    c) Soit λ et μ deux partitions. On suppose que (E, u) est à la fois de type λ et de type μ. Démontrer que $\lambda = \mu$.
15. Soit n un entier naturel.
    a) Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer l'existence et l'unicité d'une partition λ de l'entier n telle que M soit semblable à J_λ.
    b) On se replace dans le contexte de la partie II. Donner, en fonction de r et σ, la partition λ de n telle que $K_{r,\sigma}$ soit semblable à J_λ.
    c) Démontrer que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices nilpotentes proportionnelles (c'est-à-dire, se déduisant l'une de l'autre par multiplication par un scalaire non nul) sont semblables.

Partie IV

Le corps $\mathbb{K}$ est ici supposé algébriquement clos et de caractéristique différente de 2. On se donne un entier naturel $n \geqslant 1$.

16. Pour chaque entier strictement positif d, on note $\widetilde{P}_d$ la matrice carrée symétrique d'ordre d avec des zéros partout sauf sur l'antidiagonale, où l'on met des 1. Par exemple,

$$\widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie sans difficulté que $\left(\widetilde{P}_d\right)^2 = I_d$ et que $\widetilde{P}_d \widetilde{J}_d \left(\widetilde{P}_d\right)^{-1} = {}^t\left(\widetilde{J}_d\right)$. On ne demande pas de le démontrer.

Soit λ une partition de n.

a) Exhiber une matrice symétrique P dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $PJ_\lambda P^{-1} = {}^t(J_\lambda)$ et $P^2 = I_n$.

b) Trouver une matrice Q dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $QJ_\lambda Q^{-1}$ soit symétrique.
Indication : on pourra chercher Q sous la forme $aI_n + bP$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

17. a) Soit D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et soit α_1, α_2, ..., α_n les valeurs propres de D, répétées selon leurs multiplicités. Construire un polynôme $f(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, puis justifier que $f(D)^2 = D$.

b) On définit par récurrence une suite (C_k) d'entiers naturels en posant $C_0 = 1$ et en demandant que $C_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} C_i C_{k-i}$ pour $k \geqslant 0$. On définit le polynôme à coefficients entiers $\Phi(X) = 1$ si $n = 1$ et pour $n \geqslant 2$,

$$\Phi(X) = 1 - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}.$$

Calculer l'image de $\Phi(X)^2$ dans l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^n)$.

c) Donner un polynôme $g(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $g(N)^2 = I_n + N$ pour toute matrice nilpotente N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

18. On rappelle le résultat suivant : chaque matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme $P = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N est une matrice nilpotente telles que $DN = ND$; de plus, il existe un polynôme $h(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $D = h(P)$.

a) Soit P dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, écrit sous la forme $P = D + N$ comme ci-dessus. Démontrer que si P est inversible, alors D l'est aussi, et qu'en ce cas il existe un polynôme $j(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D^{-1} = j(P)$.

b) Soit P dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. Établir l'existence d'une matrice R de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = P$, et justifier qu'on peut en outre exiger que R soit un polynôme en P.
Indication : on pourra écrire $P = D + N = D(1 + D^{-1}N)$.

c) Soit P dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer l'existence d'une matrice Q dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice symétrique S dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $P = QS$, et justifier qu'on peut en outre exiger que S soit un polynôme en ${}^tPP$.

19. Soit A et B deux matrices symétriques appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B sont semblables. Démontrer l'existence d'une matrice Q dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QAQ^{-1}$.

On note $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ définie par $P \cdot M = PMP^{-1}$ pour $(P, M) \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices nilpotentes symétriques.

20. Vérifier que pour tout (P, M) dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$, on a $P \cdot M \in \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

L'action de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ se restreint donc en une action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

21. Justifier que l'application $\mathscr{O} \mapsto \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est une bijection de l'ensemble des $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$-orbites dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbites dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.
22. On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 2.
    a) Démontrer que les deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ sont semblables.
    b) Le résultat de la question 19 est-il encore valable si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 2 ?

Partie V

Étant donnés un corps $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, un endomorphisme u de E, et un sous-espace F de E stable par u, on note $u|_F$ et $u|_{E/F}$ les endomorphismes de F et E/F induits par u. (Explicitement, $u|_{E/F}$ est l'unique application de E/F dans lui-même telle que

$$u|_{E/F}(x + F) = u(x) + F$$

pour tout x dans E.) Plus généralement, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de E stables par u et tels que $F_2 \subset F_1$, on note $u|_{F_1/F_2}$ l'endomorphisme de F_1/F_2 induit par u. Les endomorphismes $u|_F$, $u|_{E/F}$ et $u|_{F_1/F_2}$ sont nilpotents dès que u l'est.
On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des partitions. Pour (λ, μ) dans $\mathscr{P}^2$, on écrit $\mu \subset \lambda$ pour indiquer que le diagramme de Ferrers de μ est inclus dans celui de λ. Autrement dit, $\mu \subset \lambda$ si et seulement si $\mu_i \leqslant \lambda_i$ pour tout $i \geqslant 1$. Visiblement, $\mu \subset \lambda$ est équivalent à $\mu' \subset \lambda'$.

23. Dans cette question, $\mathbb{K}$ est un corps, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u est un endomorphisme nilpotent de E, et F est un sous-espace de E stable par u. Soit λ le type de (E, u).
    a) Soit μ le type de $(F, u|_F)$. Démontrer que $\mu \subset \lambda$.
    b) Soit ν le type de $(E/F, u|_{E/F})$. Démontrer que $\nu \subset \lambda$.

À (λ, μ, ν) dans $\mathscr{P}^3$ et à un corps $\mathbb{K}$, on associe l'ensemble $\mathscr{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$ défini de la façon suivante : on pose $n = |\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, et on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E dont la matrice dans la base canonique est J_λ ; alors $\mathscr{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de E stables par u tels que $(F, u|_F)$ est de type μ et $(E/F, u|_{E/F})$ est de type ν.
D'après la question 23, une condition nécessaire pour que $\mathscr{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(\mathbb{K})$ ne soit pas vide est d'avoir $\mu \subset \lambda$ et $\nu \subset \lambda$. Pour des raisons de dimension, il est également nécessaire que $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$.

24. On prend $\lambda = (3,2)$, $\mu = (2,1)$, $\nu = (2)$. Soit q une puissance d'un nombre premier. Déterminer le cardinal de $\mathscr{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)$.

La fin du problème a pour objectif d'établir de façon générale que le cardinal de $\mathscr{G}^{\lambda}_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)$ est donné par un polynôme en q.

25. Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme nilpotent de E. Soit λ le type de (E,u).

    a) Quel est le type de $(\operatorname{im} u, u|_{\operatorname{im} u})$?

    b) Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit μ le type de $(F, u|_F)$. On suppose que $u|_{E/F} = 0$. Démontrer que le diagramme de Ferrers de μ s'obtient à partir de celui de λ en supprimant des boîtes, au plus une par ligne.

    c) Pour $i \geqslant 1$, établir l'égalité

$$\dim((\operatorname{im} u + \ker u^i)/\operatorname{im} u) = \lambda'_1 - \lambda'_{i+1}.$$

    d) Dans le contexte de la question b), exprimer les parts de la partition conjuguée μ' en fonction des parts de λ' et des dimensions des espaces $F \cap (\operatorname{im} u + \ker u^i)$ pour $i \geqslant 0$.

26. Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note n la dimension de E et on se donne une suite strictement croissante $(E_0, E_1, \ldots, E_n)$ de sous-espaces vectoriels de E ; ainsi chaque espace E_i est de dimension i.

    a) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, le sous-espace vectoriel $F \cap E_{i-1}$ de $F \cap E_i$ est de codimension 0 ou 1.

Dans le contexte de la question a), la suite des dimensions des espaces $F \cap E_i$ augmente au plus de 1 à chaque étape ; la dimension de F est donc égale au cardinal de l'ensemble

$$I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid F \cap E_{i-1} \neq F \cap E_i\}. \qquad (*)$$

Étant donnée une partie I de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, nous notons $\mathscr{C}_I$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de E vérifiant $(*)$. Chaque élément F de $\mathscr{C}_I$ est un espace vectoriel de dimension $|I|$.

Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on choisit un vecteur v_i de E_i n'appartenant pas à E_{i-1}. La famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est alors une base de E ; on note $(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ sa base duale.

Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$. Posons $d = |I|$ et notons i_1, i_2, ..., i_d les éléments de I, énumérés de façon croissante. Nous dirons d'une famille de vecteurs de E qu'elle est I-échelonnée réduite si elle comporte d termes, notés w_1, w_2, ..., w_d, tels que pour tous j dans $[\![1,n]\!]$ et k dans $[\![1,d]\!]$, on ait :

$$v_j^*(w_k) = 1 \text{ si } j = i_k,$$
$$v_j^*(w_k) = 0 \text{ si } j > i_k \text{ ou si } (j < i_k \text{ et } j \in I).$$

    b) Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$ et soit F dans $\mathscr{C}_I$. Démontrer que F possède une unique base I-échelonnée réduite.

    c) Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$. Établir l'existence d'une bijection entre $\mathscr{C}_I$ et l'ensemble des familles de vecteurs I-échelonnées réduites.

d) On suppose que $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{F}_q$. Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$. Exprimer le cardinal de $\mathscr{C}_I$ en fonction de q et de I.

27. Soit r un entier strictement positif et soient $e=(e_1,e_2,\dots,e_r)$ et $f=(f_1,f_2,\dots,f_r)$ deux suites d'entiers naturels telles que $f_i \leqslant e_i$ pour chaque i dans $[\![1,r]\!]$.

a) Trouver un polynôme $A_{e,f}(X)$ à coefficients entiers positifs satisfaisant la propriété suivante : si q est une puissance d'un nombre premier et si E est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel muni d'une suite croissante $(E_0,E_1,\dots,E_r)$ de sous-espaces vectoriels telle que $E_0=\{0\}$, $E_r=E$ et $e_i=\dim(E_i/E_{i-1})$ pour chaque $i\in[\![1,r]\!]$, alors $A_{e,f}(q)$ est le nombre de sous-espaces vectoriels F de E vérifiant $f_i=\dim(F\cap E_i)/(F\cap E_{i-1})$ pour chaque $i\in[\![1,r]\!]$.

b) Dans le cadre de la question a), vérifier que $A_{e,f}(X)$ est de degré $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}(e_i-f_i)f_j$.

À une partition λ dans $\mathscr{P}$, on associe l'entier $d(\lambda)=\sum_{i\geqslant 1}\lambda'_i(\lambda'_i-1)/2$.
À (λ,μ,κ) dans $\mathscr{P}^3$ et à un corps $\mathbb{K}$, on associe l'ensemble $\mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ défini de la façon suivante : on pose $n=|\lambda|$, on note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, on appelle u l'endomorphisme nilpotent de E dont la matrice dans la base canonique est J_λ, et on note ℓ la longueur de κ ; alors $\mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites décroissantes $(F_0,F_1,F_2,\dots,F_\ell)$ de sous-espaces vectoriels de E stables par u telles que $F_0=E$, $(F_\ell,u|_{F_\ell})$ soit de type μ, et pour chaque i dans $[\![1,\ell]\!]$, $\dim F_{i-1}/F_i=\kappa_i$ et $u|_{F_{i-1}/F_i}=0$.
On munit $\mathscr{P}$ d'une relation d'ordre partiel de la façon suivante : pour $(\lambda,\mu)\in\mathscr{P}^2$, on écrit $\mu\leqslant\lambda$ si $|\lambda|=|\mu|$ et $\mu_1\leqslant\lambda_1$, $\mu_1+\mu_2\leqslant\lambda_1+\lambda_2$, $\mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, ...

28. Soit (λ,μ,κ) dans $\mathscr{P}^3$. On recherche un polynôme $B^\lambda_{\mu,\kappa}(X)$ à coefficients entiers positifs tel que, pour toute puissance q d'un nombre premier, $B^\lambda_{\mu,\kappa}(q)$ soit le cardinal de $\mathscr{B}^\lambda_{\mu,\kappa}(\mathbb{F}_q)$.

a) Établir l'existence de $B^\lambda_{\mu,\kappa}(X)$ dans le cas où κ est de longueur 1.
Indication : on pourra utiliser la question 25d).

b) Traiter le cas général.

c) Soit (κ,ν) dans $\mathscr{P}^2$. Démontrer que $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(X)=1$ si $\kappa=\nu'$ et $B^\nu_{\varnothing,\kappa}(X)=0$ si $\kappa\not\leqslant\nu'$.

d) Démontrer que le polynôme $B^\lambda_{\mu,\kappa}(X)$ est nul ou est de degré $d(\lambda)-d(\mu)-d(\kappa')$.

29. Soit (λ,μ,ν) dans $\mathscr{P}^3$. Démontrer l'existence d'un polynôme $G^\lambda_{\mu,\nu}(X)$ à coefficients entiers tel que, pour toute puissance q d'un nombre premier, $G^\lambda_{\mu,\nu}(q)$ soit le cardinal de $\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)$.
Indication : on pourra méditer sur l'égalité

$$B^\lambda_{\mu,\kappa}(q)=\sum_{\nu\in\mathscr{P}}\left|\mathscr{G}^\lambda_{\mu,\nu}(\mathbb{F}_q)\right|\,B^\nu_{\varnothing,\kappa}(q).$$

30. Démontrer que le polynôme $G^\lambda_{\mu,\nu}(X)$ est nul ou est de degré majoré par $d(\lambda)-d(\mu)-d(\nu)$.