Chapitre 14 : Fonctions sinus, cosinus et sinusoïdales

Spécialité

Un peu d'histoire ...

La trigonométrie est à l'origine affiliée à l'astronomie et est aussi ancienne que la géométrie, soit 4000 ans en arrière. Mais la trigonométrie comme exposée dans ce chapitre, rangée dans le domaine des mathématiques qu'est l'« **Analyse** », trouve son origine avec l'astronome et géomètre grec Hipparque (IIe siècle av. J.C.) dans un traité dont on a que des témoignages indirects.

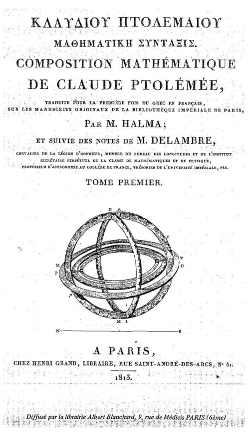
Dans ce traité on y aurait trouvé une table liant des **angles** et des **cordes**, dans un cercle de rayon 3436.
Les angles varient de 7°30' à 180° par pas de 3°45'.

La valeur de 3436 laisse penser que l'approximation de π est $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{35}{3600}$ car $2 \times \pi \times 3436 \approx 360 \times 60$.

On a des traces plus tangibles d'un même type de table de l'astronome et géomètre grec qui est à l'origine du système héliocentrique, Ptolémée (IIe siècle ap. J.C.). Le rayon de base est de 60 plus propice aux calculs en sexagésimal et les angles varient de 0°30' à 180° par pas de 30'.

Ci-dessous la couverture et des extraits de tables d'un livre de 1813 en français et en grec, qu'on espère proche de *L'almageste* original de Ptolémée. On y trouve la méthode d'obtention de ces tables. Les bases théoriques sont les livres d'Euclide, une approximation d'un côté de pentagone régulier et un théorème inédit, maintenant appelé théorème de Ptolémée.

La réciproque pour prouver la cocyclicité de quatre points est vraie.



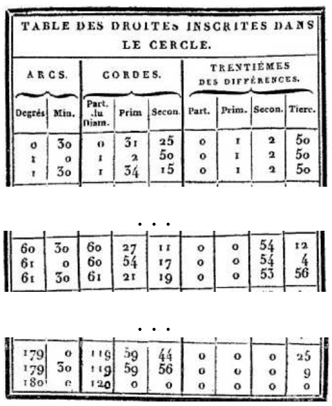
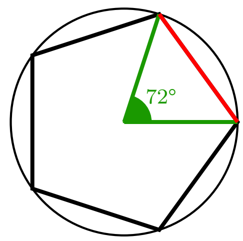
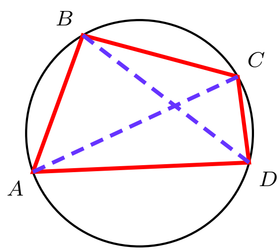


TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS. Degrés	ARCS. Min.	CORDES. Part. du Diam.	CORDES. Prim	CORDES. Secon.	TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES. Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
...								
60	30	60	27	11	0	0	54	12
61	0	60	54	17	0	0	54	4
61	30	61	21	19	0	0	53	56
...								
179	0	119	59	44	0	0	0	25
179	30	119	59	56	0	0	0	9
180	0	120	0	0	0	0	0	0



$\text{corde}(72°) = 70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{3600}$



$AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$

On doit aux savants indiens d'Inde, au Ve siècle ap. J.C, l'invention du **sinus**. Ils avaient par ailleurs connaissance des travaux d'Hipparque et le lien entre corde et sinus est le suivant :

$$\frac{\text{corde}(\alpha)}{2} = \text{sinus}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La confection de tables était d'inspirations géométriques auxquelles s'ajoutaient des procédés de calcul très perfectionnés.

Enfin la civilisation arabo-musulmane mêlent les points de vue en tabulant les sinus des angles sur la base d'un rayon 60.

Autour de l'an 1000, toutes les lignes trigonométriques utilisées de nos jours sont définies et ce sont les algorithmes de calculs qui vont être perfectionnés pour augmenter la précision des tables de calcul.

À ce jour, les calculatrices intègrent l'algorithme « **CORDIC** » pour **CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer qui intègre des astuces pour que les calculs faits soient proches de l'architecture de la machine mais se fondent sur des formules trigonométriques dérivées de $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ dont l'ancêtre est ... le théorème de Ptolémée !

- ◯ Fonctions circulaires sinus et cosinus : périodicité, variations, parité.
- ◯ Fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$, amplitude, périodicité, phase à l'origine, courbes représentatives.
- ◯ Calcul de la fonction dérivée :
  - ∘ des fonctions cosinus et sinus,
  - ∘ de $x \mapsto f(ax+b)$,
  - ∘ de $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$.

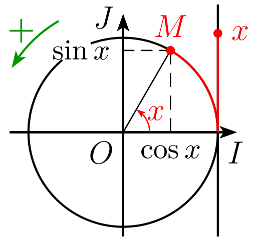
- ◯ Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés : x, $-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$.
- ◯ Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.
- ◯ Calculer une fonction dérivée faisant intervenir les fonctions cosinus et sinus.
- ◯ Calculer une primitive faisant intervenir les fonctions cosinus et sinus.

I) Rappels, définitions et généralités

1) Enroulement et cercle trigonométrique

a) Rappel

Soit (O, I, J) un repère orthonormé. Le point M, image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O, a pour coordonnées $(\cos x\ ;\ \sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

b) Définitions

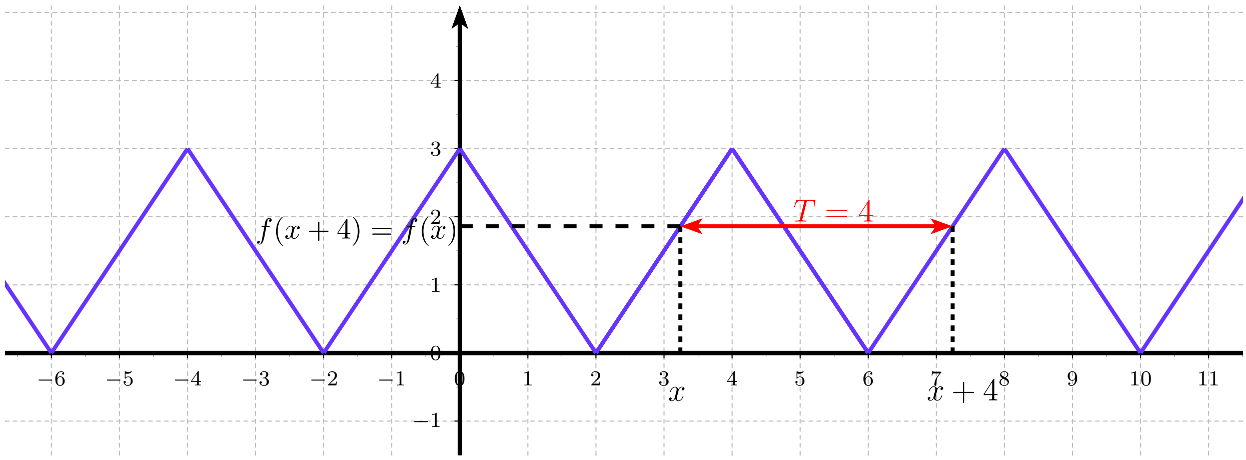
- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos : x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin : x \mapsto \sin x$.

2) Fonction périodique

a) Définition

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, alors f est dite **périodique de période T** ou **T-périodique**.

b) Illustration



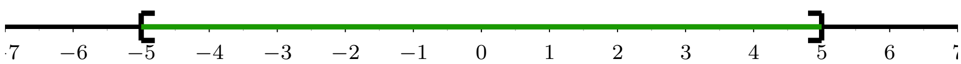
3) Fonction paire, impaire

a) Définition

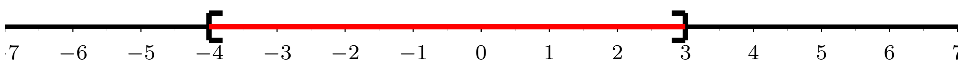
Un ensemble de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à 0 lorsque, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

b) Exemple et contre-exemple

- L'intervalle $[-5; 5]$ **est** symétrique par rapport à 0.



- L'intervalle $[-4; 3]$ **n'est pas** symétrique par rapport à 0.



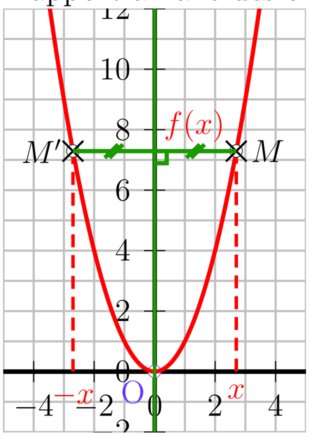
c) Définitions

Une fonction f définie sur ensemble de définition D symétrique par rapport à 0 est dite :

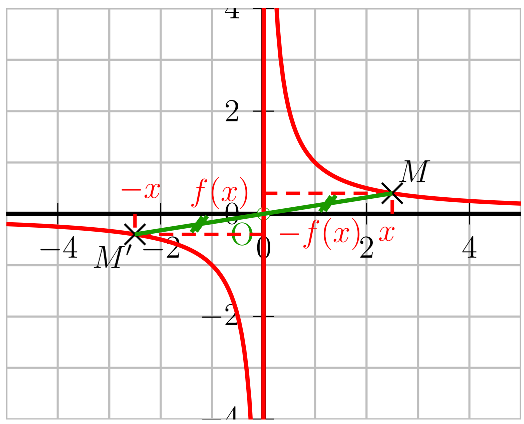
paire	**impaire**
lorsque **pour tout** $x \in D$	
$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$

d) Propriétés

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



II) Propriétés et représentation des fonctions cosinus et sinus

1) Propriétés des fonctions cosinus et sinus

a) Propriétés

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

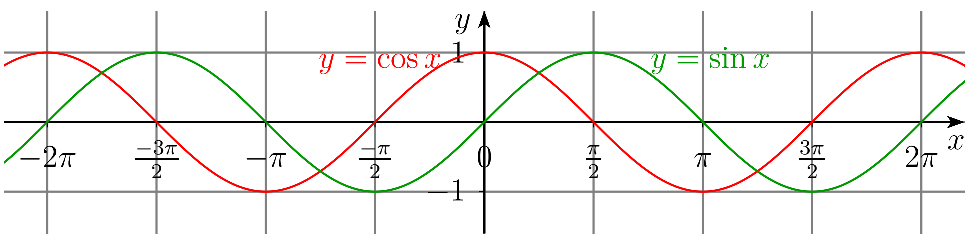
b) Preuve

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
  car enrouler de 2π radian revient au même point du cercle trigonométrique.
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
  car les images des réels x et $-x$ par l'enroulement sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2) Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus

a) Illustration

Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des **sinusoïdes**.



b) Remarques

- Les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.
- La courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine.

3) Fonctions dérivées et primitives des fonctions cosinus et sinus

a) Propriété : dérivée de cos et sin

Pour tout nombre x

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$

b) Conséquence : primitives de cos et sin

Les fonctions cos et sin ont respectivement pour primitive, à l'addition d'une constante près, les fonctions sin et $-\cos$.

III) Composition de fonctions et fonctions sinusoïdales

1) Composition de fonctions

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout nombre x de I, $g(x)$ appartient à J.
La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \overset{g}{\longmapsto} & g(x) = X & \overset{f}{\longmapsto} & f(X) \\ x & \multicolumn{3}{c}{\overset{h}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}}} & f(g(x)) \end{array}$$

Dans l'écriture « $f(g(x))$ » l'ordre des calculs se fait de la droite vers la gauche.

b) Exemple

Avec :

- f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et
- g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 5$,

la fonction h, composée de f suivie de g est définie sur $\mathbb{R}$. Et on a pour tout nombre x de $\mathbb{R}$: $h(x) = f(g(x)) = f(2x-5) = (2x-5)^3$

2) Dérivée d'une fonction composée

a) Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres tels que, pour tout nombre x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle J.
La fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, et pour tout nombre x de I,

$$h'(x) = a \times f'(ax+b)$$

.

b) Exemple

Avec la fonction h de l'exemple précédent,
h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-5)^3$
Les fonctions $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto 2x-5$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 2 \times f'(2x-5) = 2 \times 3(2x-5)^3 = 6(2x-5)^3$.

3) Fonctions sinusoïdales : $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$

a) Définition

Une fonction est dite **sinusoïdale**, est une fonction de la forme

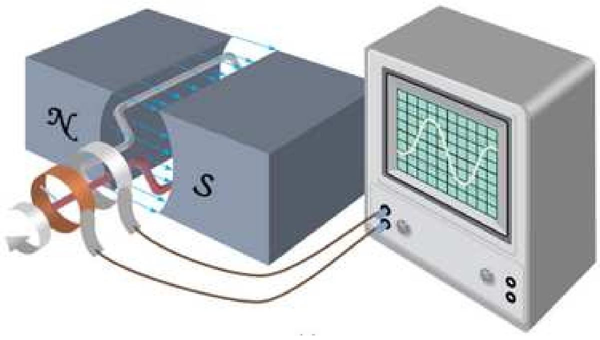
$t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ ou $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$,

où A, ω, φ sont des **paramètres** et t la **variable**.

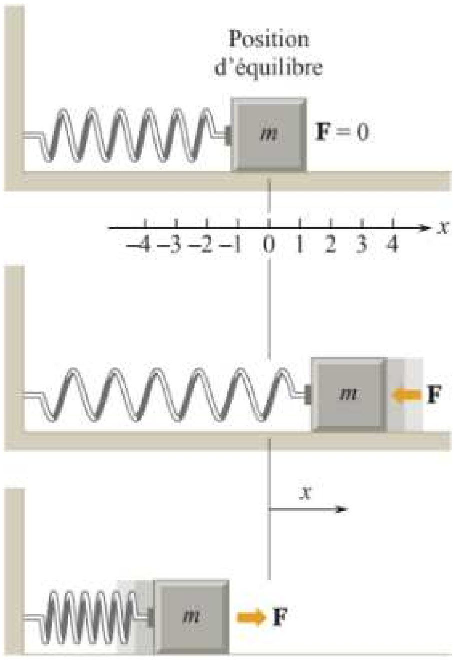
b) Exemples d'application

Des grandeurs physiques, variant avec le temps t , peuvent être modélisées (écrites par les mathématiques dans un contexte idéalisé) par des fonctions du type **sinusoïdal**, où A, ω et φ sont des nombres qui s'interprètent respectivement par une **amplitude**, une **pulsation** et une **phase**.

- En Électricité, pour la description d'un courant alternatif.

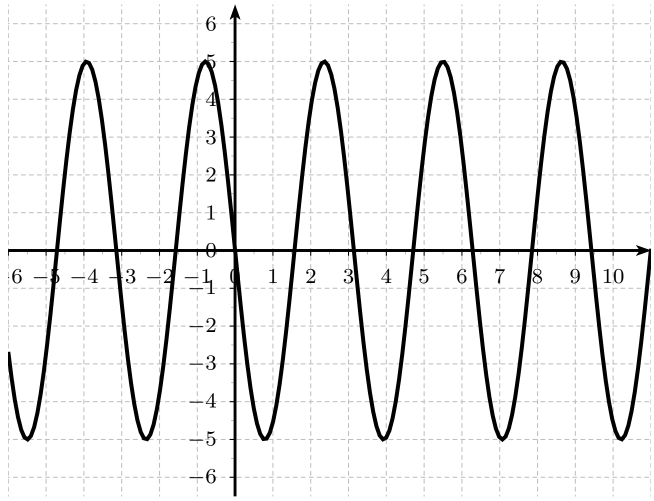


- en Mécanique, pour la description du mouvement d'une masse reliée à ressort lorsqu'on l'écarte de la position d'équilibre.



c) Remarque : représentation d'une fonction sinusoïdale

La même fonction sinusoïdale peut être écrite par plusieurs expressions.
Par exemple, $t \mapsto 5\sin(2t + 5\pi)$, $t \mapsto -5\sin(2t)$, $t \mapsto 5\sin(-2t)$ et $t \mapsto 5\cos(2t + \frac{\pi}{2})$ ont la même représentation graphique ci-dessous :



L'écriture retenue passe par l'usage de la trigonométrie, d'outils de calcul et de l'analyse physique du phénomène étudié.

d) Propriétés : dérivée

Soient A, ω et φ des nombres réels :
Pour tout nombre $t \in \mathbb{R}$:

- $(A\cos(\omega t + \varphi))' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$
- $(A\sin(\omega t + \varphi))' = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

e) Propriétés : primitives

Soient A, ω et φ des nombres réels :
Sur $\mathbb{R}$:

- $t \mapsto \dfrac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$ est une primitive de $A\cos(\omega t + \varphi)$;
- $t \mapsto -\dfrac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi$ est une primitive de $A\sin(\omega t + \varphi)$.

Toutes les autres primitives sur $\mathbb{R}$ s'obtiennent en ajoutant une constante réelle k.