INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1981

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Soit E l'espace vectoriel complexe des fonctions indéfiniment dérivables définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$; E' est le sous-espace de E engendré par les fonctions : $x \longmapsto x^p \cdot \exp(\alpha x)$ $[p \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}]$; si $f \in E$, on notera E_f le sous-espace de E engendré par les fonctions $f_t : x \longmapsto f(x+t)$, t décrivant $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}[x]$ est l'ensemble des polynômes complexes en x, dont le sous-espace des polynômes de degré au plus égal à m est noté $\mathbb{C}_m[x]$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Enfin, si

$$P = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$$

est élément de $\mathbb{C}[x]$, on lui associe $P(D) \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall g \in E, \qquad P(D)(g) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot g^{(n)}, \text{ où } g^{(n)} \text{ est la dérivée } n^{\text{ième}} \text{ de } g\,;$$

on pose $g^{(0)} = g$.

1° Déterminer E_f dans chacun des cas suivants, en précisant à chaque fois une base : $f(x) = \exp x$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x \exp x$.

2° Montrer, en utilisant par exemple la fonction $x \longmapsto \exp(x^2)$, que $\{f \mid f \in E \text{ et } E_f \text{ de dimension finie}\}$ est différent de E.

Tournez la page S. V. P.

3° Soit f un élément non nul de E'.

a. Montrer que f peut être écrit de façon unique sous la forme :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} P_j(x) \cdot \exp(\alpha_j x), \quad \text{où} \quad P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{C}[x] - \{0\},$$

et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont r nombres complexes deux à deux distincts. On appellera *longueur* de f l'entier naturel :

$$l(f) = \sum_{j=1}^{r} [\text{degré } P_j + 1],$$

en convenant de : $l(0) = 0$.

b. Montrer que E_f est de dimension finie, et que : $\dim E_f \leqslant l(f)$.

4° Soit Q un élément de $\mathbb{C}[x]$, de degré $m \geqslant 0$.

a. Prouver qu'il existe une famille unique $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_m)$ dans $\mathbb{C}[x]$ telle que, pour tout réel t :

$$Q(x+t) = \sum_{k=0}^{m} t^k \cdot Q_k(x),$$

et déterminer les polynômes Q_k.

b. En déduire que, si $t_0, t_1, \ldots, t_m$ sont des nombres réels deux à deux distincts, les polynômes $Q(x+t_0), Q(x+t_1), \ldots, Q(x+t_m)$ constituent une base de $\mathbb{C}_m[x]$.

c. Montrer que, Q étant considéré comme élément de E, $\dim E_Q = l(Q)$.

5° Soit f un élément de E, tel que E_f soit de dimension finie n, et soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une base de E_f.

a. Montrer qu'il existe n nombres réels $t_1, \ldots, t_n$ tels que, si $a_{ij} = g_i(t_j)$, le déterminant de la matrice de terme général a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ est non nul.

b. Montrer qu'il existe une famille unique d'applications $h_1, \dots, h_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant pour tout couple (x, t) de nombres réels :

$$f(x+t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t) \cdot g_j(x)$$

Montrer que les applications $h_1, \dots, h_n$ sont toutes dans E_f.

c. En déduire que $D(f) = f'$ est encore dans E_f.

d. Montrer enfin que f est dans E', et que $l(f) \leqslant \dim E_f$.

6° Soit f élément de E', de longueur n.

a. Montrer que les polynômes P de $\mathbb{C}[x]$, tels que f est dans le noyau de P (D), forment un idéal I_f non nul de $\mathbb{C}[x]$, dont un générateur est de degré n.

b. Soit P_0 un tel générateur; montrer que : $E_f = \operatorname{Ker} P_0(D)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la restriction de D à E_f soit diagonalisable.

c. Soit $f \in E'$, telle que :

$$f(x) = (x^3 + x) \cdot \sin 2x + (x^2 - 7) \cdot \operatorname{ch} 2x ;$$

déterminer P_0 dans ce cas [on le choisira de terme de plus haut degré à coefficient 1].