Problème 42 :

LE PROBLÈME DE KOSZUL

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et on note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs appartenant à E. On désigne par u un vecteur unitaire de E et par σ la symétrie qui transforme tout élément $x \in E$ en $\sigma(x) = x - 2\,(x \mid u)\,u$.

Soit Ω l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x \mid \sigma(x)) \leq 0$ et $(x \mid u) \geq 0$. On désigne par N l'ensemble des endomorphismes α de E tels que $\alpha(\Omega) \subset \Omega$ et par N_+ l'ensemble des endomorphismes de la forme de la forme $\beta + \gamma$, où β et γ sont deux éléments de N linéairement indépendants dans l'espace des endomorphismes de E. On dira qu'un endomorphisme de E est <u>extrémal</u> s'il appartient à N et n'appartient pas à N_+.

PARTIE I

1 °)

Comparer Ω et l'ensemble des éléments $y \in E$ tels que $(y \mid x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

2 °)

Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang ≤ 1.

3 °)

Existe-t-il des endomorphismes extrémaux de rang 2 ?

4 °)

L'endomorphisme identité est-il extrémal?

5 °)

Soit α un endomorphisme de E tel que $\alpha(\Omega) = \Omega$ et soit β un endomorphisme extrémal. Les endomorphismes composés $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \gamma$ sont-ils extrémaux? l'endomorphisme α est-il extrémal?

PARTIE II

1 °)

Soit y un élément de E non nul et soit $m = (y \mid \sigma(y))$. Pour tout nombre réel t, on désigne par $\alpha_{t,y}$ l'endomorphisme de E tel que:

$$\alpha_{t,y}(x) = x + \left(\int_0^t \mathrm{e}^{m\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)(x \mid \sigma(y))\,y$$

pour tout $x \in E$. Montrer que, quel que soit t, $\alpha_{t,y}$ est de rang 3 et calculer l'endomorphisme inverse.

2 °)

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N$ ainsi que les valeurs de t pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N_+$.

3 °)

Montrer que si $\alpha_{t,y} \in N$, alors $\alpha_{t,y}$ est somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux.

4 °)

Soit P le plan, ensmeble des $x \in E$ tels que $(x \mid u) = 1$, et soit S une ellipse du plan P contenue dans Ω. Montrer que si S n'est pas le cercle de centre u et de rayon 1 du plan P, alors il existe un $y \in E$, différent de zéro, et un nombre réel t tels que $\alpha_{t,y} \in N_+$ et $S \subset \alpha_{t,y}(\Omega)$.

PARTIE III

1 °)

Soient α et β deux endomorphismes de E tels que

$$\beta(\Omega) \subset \alpha(\Omega) \subset \Omega$$

Montrer que si β est de rang 3 et si $\alpha \in N_+$, alors $\beta \in N_+$.

2 °)

Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 3 (on utilisera les résultats de II). Le composé de deux endomorphismes extrémaux (de rangs quelconques) est-il un endomorphisme extrémal?

3 °)

Tout endomorphisme de E appartenant à N est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux? (on pourra commencer par étudier le cas d'un endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 3 tel que l'intersection de $\alpha(\Omega)$ et du plan P défini en II-4) soit un cercle et son intérieur: on montrera que, dans ce cas, il existe un $z \in \Omega$ tel que $\alpha(\Omega)$ soit l'image de Ω par l'endomorphisme qui transforme tout $x \in E$ en $x + (x \mid u)\, z$).

4 °)

L'endomorphisme γ de E défini par $\gamma(x) = -x + \frac{5}{2}\,(x \mid u)\, u$ est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphisme extrémaux de rang 1 ?

☆ ☆ ☆

PRÉLIMINAIRES SUR LA CONVEXITÉ

Dans un but de clarification, il paraît utile de rassembler ici quelques propriétés générales des ensembles convexes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Certaines de ces propriétés sont ou de vérification très facile, ou établies dans tous les exposés élémentaires sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels: nous nous sommes permis de les énoncer sans démonstration. Etant donné un espace topologique T et une partie A de T, nous noterons respectivement $\mathtt{Adh}_T(A)$, $\mathtt{Int}_T(A)$ et $\mathtt{Front}_T(A)$ l'adhérence, l'intérieur et la frontière de A dans T. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira simplement $\mathtt{Adh}(A)$, $\mathtt{Int}(A)$ et $\mathtt{Front}(A)$. Dans tout ce qui suit, tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sera automatiquement muni de la topologie des normes.

Soit V un $\mathbb{R}$-e.v. Etant donnés $a \in V$ et $b \in V$ avec $a \neq b$, on notera respectivement $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ et $]a,b]$ les images des intervalles $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1[$ et $]0,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application $\mathbb{R} \to V$, $\lambda \mapsto \lambda b + (1-\lambda)a$, et on les appellera respectivement *intervalle fermé, intervalle semi-ouvert en* b, *intervalle ouvert* et *intervalle semi-ouvert en* a d'extrémités a et b. Ces intervalles ne dépendent que de l'*ensemble* $\{a,b\}$.

Rappelons qu'une partie C de V est dite *convexe* ssi pour tous $a \in C$ et $b \in C$ avec $a \neq b$, on a $[a,b] \subset C$. Il revient au même de dire que l'image de l'application $C \times C \times [0,1] \to V$, $(x,y,\lambda) \mapsto \lambda y + (1-\lambda)x$ est contenue dans C.

Dans V, toute intersection de parties convexe est convexe. Etant donné un deuxième $\mathbb{R}$-e.v. W et une application affine $f : V \to W$, l'image par f d'une partie convexe de V est convexe, et l'image réciproque par f d'une partie convexe de W est convexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous noterons Δ_n la partie de $[0,1]^n$ formée des n-uples $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 1$. Cet ensemble Δ_n est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$ appelée le *n-simplexe canonique*.

Une partie C de V est convexe ssi pour tout entier $n \geq 1$, l'image de l'application $C^n \times \Delta_n \to V$, $(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i$ est contenue dans C.

Soit A une partie de V. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{C}_n(A)$ l'image de l'application $A^n \times \Delta_n \to V$, $(a_1, \dots, a_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i a_i$. L'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}^\star} \mathcal{C}_n(A)$ est convexe, et c'est l'intersection des parties convexes de V contenant A. On l'appelle l'*enveloppe convexe* de A. Nous la noterons $\mathtt{Conv}(A)$. Il est clair que A est convexe ssi $\mathtt{Conv}(A) = A$. Pour toute partie A de V, on a $\mathtt{Conv}(\mathtt{Conv}(A)) = \mathtt{Conv}(A)$.

Soit C une partie convexe de V. Un point $a \in C$ est dit *point extrémal* de C ssi les relations $x \in C$, $y \in C$ et $a = \frac{1}{2}(x+y)$ impliquent $x = y = a$. Il revient au même de dire que a n'appartient à aucun intervalle ouvert à extrémités dans C. Il est clair que si V est normé et muni de la topologie associée, tout point extrémal d'une partie convexe C de V est nécessairement point frontière de C.

Soit C une partie convexe non vide de V et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de V, défini par $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(0)$, où φ est une fonction affine non constante de V dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{H}$ *ne partage pas* C ssi $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_+$ ou $\varphi(C) \subset \mathbb{R}_-$, et sinon on dit que $\mathcal{H}$ *partage* C. On dit que $\mathcal{H}$ est *hyperplan d'appui* de C ssi soit $\mathtt{Sup}_{x \in C}(\varphi(x)) = 0$, soit $\mathtt{Inf}_{x \in C}(\varphi(x)) = 0$ (donc un hyperplan d'appui de C ne partage pas C). Ces définitions ne dépendent que de $\mathcal{H}$ et non du choix de la forme affine φ telle que $\varphi^{-1}(0) = \mathcal{H}$.

La propriété élémentaire suivante est bien connue (mais pas tout à fait triviale):

Proposition 1

Supposons V muni d'une norme $\|.\|$, et de la topologie associée. Soit C une partie convexe de V. Pour tout point $a \in \mathtt{Int}_V(C)$ et tout point $b \in \mathtt{Adh}_V(C)$, on a $[a,b[\subset \mathtt{Int}_V(C)$. Les ensembles $\mathtt{Int}(C)$ et $\mathtt{Adh}(C)$ sont convexes, et si $\mathtt{Int}(C) \neq \emptyset$, on a $\mathtt{Adh}(C) = \mathtt{Adh}(\mathtt{Int}(C))$.

Lorsque V est de dimension finie, une partie convexe C de V engendre le $\mathbb{R}$-e.v. V ssi $\mathtt{Int}_V(C) \neq \emptyset$.

Cônes

Soit V un $\mathbb{R}$-e.v. non nul. Une partie S de V sera appelée un *cône* ssi $\mathbb{R}_+^\star S \subset S$, i.e. ssi on a $\lambda x \in S$ pour tous $x \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Un cône S est dit *pointé* ssi $0_V \in S$, et sinon il est dit *épointé*.

Une partie S de $V \setminus \{0_V\}$ est un cône ssi $S \cup \{0_V\}$ est un cône.

Pour qu'un cône S de V soit convexe, il faut et il suffit qu'il soit stable pour l'addition de V.

Soit S un cône convexe pointé de V. L'union des sous-$\mathbb{R}$-e.v. de V contenus dans S est contenue dans S, c'est le plus grand sous-$\mathbb{R}$-e.v. de V contenu dans S. On l'appelle le *sommet* de S. On dit que S est *saillant* ssi son sommet est réduit à $\{0_V\}$. Un cône convexe épointé non vide S' de V est dit *saillant* ssi le cône convexe pointé $S' \cup \{0_V\}$ est saillant.

Soit S un cône convexe pointé de V. Alors les assertions suivantes sont équivalentes: (I) S est saillant; (II) 0_V est point extrémal de S; (III) $S \cap (-S) = \{0_V\}$.

Soit S un cône de V non vide et non réduit à $\{0_V\}$. Les demi-droites vectorielles de V ouvertes (resp. fermées) contenues dans S sont appelées les *génératrices ouvertes* (resp. les *génératrices fermées*) de S. Pour tout $a \in S \setminus \{0_V\}$, la demi-droite $\mathbb{R}_+^\star a$ (resp. $\mathbb{R}_+ a$) est l'unique génératrice ouverte (resp. fermée) de S passant par a, on l'appelle *génératrice ouverte (resp. fermée) de* a.

Soit S un cône convexe de V non vide et non réduit à $\{0_V\}$. Une génératrice G de S est dite *extrémale* ssi les relations $a \in G$, $x \in S$, $y \in S$ et $a = x + y$ impliquent $x \in G$ ou $y \in G$. Il revient au même de dire que tout intervalle ouvert à extrémités dans S et qui rencontre G est contenu dans $G \cup \{0_V\} \cup (-G)$. Si S est *saillant*, la définition se simplifie: G est extrémale ssi les relations $a \in G$, $x \in S$, $y \in S$ et $a = x + y$ impliquent: $x \in G$ et $y \in G$. Dans tous les cas, la génératrice G est extrémale ssi $G \cup \{0_V\}$ l'est. Il est clair que si V est normé et muni de la topologie associée, toute génératrice extrémale de S est contenue dans $\mathtt{Front}_V(S)$.

Soit A une partie non vide de V. L'ensemble $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^\star} (\lambda A)$ (resp. $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} (\lambda A)$) est le plus petit cône épointé de V contenant A (resp. le plus petit cône pointé de V contenant A). On l'appelle le *cône épointé engendré par* A (resp. le *cône pointé de* V *engendré par* A). On passe de l'un à l'autre de ces cônes en lui ôtant ou en lui rajoutant le point 0_V. On conviendra que le cône épointé engendré par $\emptyset$ est $\emptyset$.

Proposition 2

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de V tel que $0_V \notin \mathcal{H}$, et soit C une partie non vide de $\mathcal{H}$. Soit S le cône engendré par C. Alors $S \cap \mathcal{H} = C$; S est convexe ssi C est convexe; lorsque C est convexe, le cône convexe S est saillant, et pour tout $a \in C$, la génératrice $\mathbb{R}_+^\star a$ de S est extrémale ssi a est point extrémal de C.

Soit S un cône de V non vide et non réduit à $\{0_V\}$. On appelle *base* de S toute partie non vide C d'un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de V ne contenant pas 0_V et telle que $S \setminus \{0_V\}$ soit le cône épointé engendré par C. Un cône S, même convexe saillant, n'admet pas nécessairement de base. Par exemple dans $V = \mathbb{R}^2$, le cône

$$S = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star) \cup (\mathbb{R}_+ \times \{(0,0)\})$$

est convexe saillant et n'admet aucune base.

Supposons V normé et muni de la topologie associée. On vérifie immédiatement que l'adhérence d'un cône non vide est un cône pointé, et que l'intérieur d'un cône $S \neq V$ est un cône épointé.

Proposition 3

Supposons V muni d'une norme $\|\,.\,\|$ et de la topologie associée. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine fermé de V tel que $0_V \notin \mathcal{H}$, et soit C une partie de $\mathcal{H}$. Soit S le cône pointé engendré par C. Alors $\mathtt{Int}_V(S)$ est le cône épointé engendré par $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$. Si de plus C est relativement compact, $\mathtt{Adh}_{\mathcal{H}}(S)$ est le cône pointé engendré par $\mathtt{Adh}_{\mathcal{H}}(C)$, et $\mathtt{Front}_V(S)$ est le cône pointé engendré par $\mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C)$.

Démonstration:

Pour tout $a \in V$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, notons $B(a,r)$ la boule ouverte de V de centre a et de rayon r. Soit $x \in \mathcal{H}$ et soit un réel $r \in]0,1[$. Soit U le cône épointé engendré par $\mathcal{H} \cap B(x,r)$. Soit φ la forme linéaire continue sur V telle que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(1)$. Fixons $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Posons $y = \lambda x$. On a $\varphi(y) = \lambda$, et φ est continue. On peut donc choisir $\eta \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\eta < \frac{r\lambda}{2}$ et que pour tout $y' \in V$ vérifiant $\| y - y' \| \leq \eta$, on ait $\varphi(y') > 0$ et $\left| 1 - \frac{\lambda}{\varphi(y')} \right| < \frac{r}{(2\| x \|+r)\lambda}$. Alors pour $y' \in V$ tel que $\| y - y' \| \leq \eta$, on a $\| y' \| \leq \frac{3\lambda}{2} \| x \|$, d'où:

$$\left\| x - \frac{1}{\varphi(y')} y' \right\| = \frac{1}{\lambda} \left(\| y - y' \| + \left\| \left(1 - \frac{\lambda}{\varphi(y')} \right) y' \right\| \right) < r$$

ce qui démontre que $B(y,\eta) \subset U$. On déduit aisément de là que le cône épointé engendré par un ouvert de $\mathcal{H}$ est un ouvert de V. Par suite, le cône épointé engendré par $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$ est ouvert et contenu dans $\mathtt{Int}_V(S)$. Inversement, soit $y \in \mathtt{Int}_V(S)$. On a $y \neq 0_V$, car $S \neq V$ (on a $\mathtt{Ker}(\varphi) \cap S = \{0_V\}$). Soit un réel r tel que $0 < r < \| y \|$ et que $B(y,r) \subset S$. Soit U le cône épointé engendré par $B(y,r)$: c'est un ouvert (union des boules ouvertes $\lambda B(y,r)$ pour $\lambda > 0$). On a $U \subset S$, et $U \cap \mathcal{H}$ est un ouvert de $\mathcal{H}$, donc $\frac{1}{\varphi(y)} y \in \mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$. Cela achève de prouver que le cône épointé engendré par $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$ est $\mathtt{Int}_V(S)$.

Supposons maintenant C relativement compacte. Notons $\overline{C} = \mathtt{Adh}_{\mathcal{H}}(C)$: c'est un compact non vide de $\mathcal{H}$. Le cône pointé $\overline{S}$ engendré par $\overline{C}$ est de manière évidente contenu dans $\mathtt{Adh}_V(S)$, et contient S. Pour montrer que $\overline{S} = \mathtt{Adh}_V(S)$, il suffit donc de montrer que $\overline{S}$ est fermé dans V. C'est dû à la compacité de $\overline{C}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit K_n l'image du compact $[n, n+1] \times \overline{C}$ par l'application continue $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times V$ (muni de la topologie des normes) dans V. Les K_n sont compacts donc fermés dans V, on a $\overline{S} = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, et la famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *localement finie*. Donc $\overline{S}$ est fermé en tant qu'union d'une famille localement finie de fermés, ce qui achève de prouver que $\overline{S} = \mathtt{Adh}_V(S)$.

On a alors $\mathtt{Front}_V(S) = \mathtt{Adh}_V(S) \setminus \mathtt{Int}_V(S) = \overline{S} \setminus S'$, où S' désigne le cône épointé engendré par $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$. Donc $\mathtt{Front}_V(S)$ est le cône pointé engendré par $\overline{C} \setminus \mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C) = \mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C)$ ■

Supposons V muni d'une norme et de la topologie associée. Un cône S de V est dit à *base compacte* ssi il admet une base compacte dans un hyperplan affine fermé de V ne contenant pas 0_V.

Etant donné un cône S non vide et non réduit à $\{0_V\}$, on appellera *génératrice frontière* de S toute génératrice de $\mathtt{Adh}_V(S)$ contenue dans $\mathtt{Front}_V(S)$. Par exemple si S est convexe, toute génératrice extrémale de S est génératrice frontière.

Proposition 4

Supposons V de dimension finie $n \geq 1$. Soit C une partie de V convexe, compacte et d'intérieur non vide. Alors pour tout point $a \in \mathtt{Int}_V(C)$, toute demi-droite affine fermée de V d'origine a rencontre $\mathtt{Front}_V(C)$ en un point unique. L'ensemble $\mathtt{Front}_V(C)$ est homéomorphe à la sphère S_n de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = 1$.

Démonstration:

On peut supposer que $0_V \in \mathtt{Int}_V(C)$. Fixons une norme *euclidienne* $\| . \|$ de V. Pour tous $x \in V$ et $r \in \mathbb{R}_+$, notons respectivement $B(x,r)$ et $\widetilde{B}(x,r)$ la boule ouverte et la boule fermée de $(V, \| . \|)$ de centre x et de rayon r. Soit un réel $r > 0$ tel que $\widetilde{B}(0_V, r) \subset C$, et soit un réel $R > r$ tel que $C \subset \widetilde{B}(0_V, R)$ (un tel R existe car C, étant compact, est borné). Si $x \in V \setminus \{0_V\}$, pour tout réel $\lambda > \frac{R}{\| x \|}$, on a $\lambda x \notin C$, et pour tout réel λ tel que $0 < \lambda < \frac{r}{\| x \|}$, on a $\lambda x \in C$. On définit donc une fonction $J_C : V \to \mathbb{R}_+$ en posant $J_C(0_V) = 0$ et, pour $x \neq 0_V$, $J_C(x) = \mathtt{Inf}_{\lambda \in \mathbb{R}_+^\star} \left(\frac{1}{\lambda} \right)$. D'après ce qu'on vient de voir, on a $J_C(x) = 0$ ssi $x = 0_V$.

Montrons maintenant qu'on a $J_C(x+y) \leq J_C(x)+J_C(y)$ pour tous $x \in V$ et $y \in V$. On peut supposer x et y non nuls. Soit des réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que $\lambda x \in C$ et $\mu x \in C$. Alors par convexité de C, on a:

$$\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(x+y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda x) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mu x) \in C$$

d'où $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geq J_C(x+y)$. L'inégalité voulue s'en déduit. La définition de J_C rend évident que $J_C(\rho x) = \rho J_C(x)$ pour tous $x \in V$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que J_C est continue en 0_V, car étant donné un réel $\eta > 0$, tout $x \in V$ tel que $\|x\| \leq \eta r$ vérifie $J_C(x) \leq \eta$. Si $x \in V$ et $y \in V$, en écrivant que $x = (x-y)+y$, on voit que $J_C(x) - J_C(y) \leq J_C(x-y)$. De même, $J_C(y) \leq J_C(x) + J_C(y-x)$, d'où:

$$|J_C(x) - J_C(y)| \leq \mathtt{Max}(J_C(x-y), J_C(y-x))$$

inégalité qui prouve, compte tenu que J_C est continue en 0_V, que J_C est uniformément continue sur V. On vérifie alors facilement (compte tenu que C est compact donc fermé) qu'étant donné $x \in V \setminus \{0_V\}$, le point $\varphi(x) = \frac{1}{J_C(x)}x$ est l'unique point de $\mathtt{Front}_V(C) \cap \mathbb{R}_+ x$ (en particulier, $x \in \mathtt{Front}_V(C)$ ssi $J_C(x) = 1$). La continuité de J_C sur V entraîne que φ ainsi définie sur $V \setminus \{0_V\}$ est continue. Notons $\mathfrak{E}$ la sphère euclidienne $\{x \in V \mid \|x\| = 1\}$. L'application $\varphi|_{\mathfrak{E}}$ définit une bijection de $\mathfrak{E}$ sur $\mathtt{Front}_V(C)$, qui est continue puisque J_C est continue. Comme $\mathfrak{E}$ est une partie compacte de V, cette bijection est un homéomorphisme. Comme $\mathfrak{E}$ est homéomorphe à $\mathcal{S}_n$, toutes les assertions sont établies ■

On déduit immédiatement de la proposition 4:

Corollaire

Avec les notations et hypothèses de la proposition 4, C est l'enveloppe convexe de sa frontière.

Cônes et endomorphismes

Soit V un $\mathbb{R}$-e.v. non nul. Pour toute partie non vide A de V, nous noterons $\mathcal{N}_A$ l'ensemble des endomorphismes $f \in \mathtt{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ tels que $f(A) \subset A$.

Proposition 5

Soit S un cône convexe pointé de V. L'ensemble $\mathcal{N}_S$ est un cône convexe pointé de $\mathtt{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$. Si S est saillant et engendre le $\mathbb{R}$-e.v. V, alors le cône convexe $\mathcal{N}_S$ est saillant (i.e. $0_{\mathtt{Hom}_{\mathbb{R}}(V)}$ est point extrémal de $\mathcal{N}_S$).

Démonstration:

Seule la dernière assertion mérite une preuve. Supposons donc que S soit saillant et engendre V (donc $S \neq \{0_V\}$). Soit $f \in \mathcal{N}_S$ tel que $f \neq 0$ et $-f \in \mathcal{N}_S$. On peut alors choisir $x \in S$ tel que $y = f(x) \neq 0_V$, d'où $y \in S \setminus \{0_V\}$. Comme $-f \in \mathcal{N}_S$, on a aussi $-y = (-f)(x) \in S$, ce qui est impossible puisque S est saillant. Donc $\mathcal{N}_S \cap (-\mathcal{N}_S) = \{0_{\mathtt{Hom}_{\mathbb{R}}(V)}\}$, i.e. $\mathcal{N}_S$ est saillant ■

Proposition 6

Supposons V de dimension finie $n \geq 3$. Soit S un cône convexe de V à base compacte et d'intérieur non vide tel que toute génératrice frontière de S soit extrémale. Soit $\alpha \in \mathcal{N}_S$ tel que $\alpha(S) = S$. Alors α est point extrémal de $\mathcal{N}_S$.

Démonstration:

En vertu des hypothèses, S est fermé, saillant, d'intérieur non vide, donc engendre le $\mathbb{R}$-e.v. V. Par suite, $\alpha \in \mathbf{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ et $\alpha^{-1} \in \mathcal{N}_S$ puisque $\alpha(S) = S$. Donc α est un homéomorphisme de V sur V, ce qui entraîne: $\alpha(\mathtt{Front}_V(S)) = \mathtt{Front}_V(S)$.

Soit C une base compacte de S, dans un hyperplan affine $\mathcal{H}$ ne contenant pas 0_V. D'après les propositions 3 et 4, $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$ est non vide et $\mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C)$ engendre affinement $\mathcal{H}$, donc $\mathtt{Front}_V(S)$ engendre le $\mathbb{R}$-e.v. V.

Soit β et γ deux éléments non nuls de $\mathcal{N}_S$ tels que $\alpha = \beta + \gamma$. Alors pour tout $x \in \mathtt{Front}_V(S) \setminus \{0_V\}$, on a $\alpha(x) = \beta(x) + \gamma(x) \in \mathtt{Front}_V(S)$, donc il existe $\mu_x \in \mathbb{R}_+$ et $\nu_x \in \mathbb{R}_+$ tels que $\beta(x) = \mu_x \alpha(x)$ et $\gamma(x) = \nu_x \alpha(x)$. Donc tout élément de $\mathtt{Front}_V(S) \setminus \{0_V\}$ est vecteur propre de chacun des endomorphismes $f = \alpha^{-1}\beta$ et $g = \alpha^{-1}\gamma$. Comme $\mathtt{Front}_V(S)$ engendre V, on voit que f et g sont diagonalisables. Montrons que ce sont des homothéties. Supposons que f ait au moins deux valeurs propres distinctes. Alors on aurait deux sous-$\mathbb{R}$-e.v. supplémentaires non nuls M et N contenant $\mathtt{Front}_V(S)$, donc on aurait $\mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C) \subset A = (M \cap \mathcal{H}) \cup (N \cap \mathcal{H})$. Mais A est un fermé sans point intérieur dans $\mathcal{H}$, donc il existe $b \in \mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C) \setminus A$. Pour un tel b, compte tenu que $\mathtt{dim}(\mathcal{H}) \geq 2$, il est immédiat qu'il existe une demi-droite affine de $\mathcal{H}$ d'origine b ne rencontrant pas A, donc ne rencontrant pas $\mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C)$, ce qui est en contradiction avec la proposition 4. Cette contradiction montre que f n'a qu'une valeur propre, et puisque f est diagonalisable, c'est une homothétie. De même pour g. On en déduit que β et γ sont $\mathbb{R}$-proportionnels à α. Donc α est extrémal ■

Proposition 7

Supposons V muni d'une norme $\|\,.\,\|$ et de la topologie associée. Soit S un cône convexe pointé saillant d'intérieur non vide, et soit $\alpha \in \mathcal{N}_S \setminus \{0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)}\}$. On a alors $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap S \subset \mathtt{Front}_V(S)$. En conséquence, si $\mathtt{Ker}(\alpha)$ est un hyperplan, il est fermé et ne partage pas S.

Démonstration:

La première assertion signifie que $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap \mathtt{Int}_V(S) = \emptyset$. Si $\mathtt{Ker}(\alpha)$ rencontrait $\mathtt{Int}_V(S)$, il existerait $x \in \mathtt{Int}_V(S) \setminus \mathtt{Ker}(\alpha)$ et $y \in \mathtt{Int}_V(S) \setminus \mathtt{Ker}(\alpha)$ tels que $x + y \in \mathtt{Ker}(\alpha)$. Choisissons de tels x et y, et posons $v = \alpha(x)$. Alors $v \in S \setminus \{0_V\}$, et $\alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(x+y) = 0_V$, d'où $\alpha(y) = -v$. On aurait donc $v \in S \cup (-S)$, ce qui est impossible, car S est saillant. Cette contradiction prouve la première assertion.

Supposons maintenant que $\mathtt{Ker}(\alpha)$ est un hyperplan, d'équation $\psi(x) = 0$, où ψ est une forme linéaire non nulle. Remarquons tout de suite que cet hyperplan est fermé, car il ne rencontre pas l'ouvert non vide $\mathtt{Int}_V(S)$, et on sait que tout hyperplan est fermé ou partout dense. Si $\mathtt{Ker}(\alpha)$ partageait S, il existerait $a \in S$ et $b \in S$ tels que $\psi(a) < 0$ et $\psi(b) > 0$. L'intérieur de $\mathtt{Ker}(\alpha)$ est vide, donc il existe $c \in \mathtt{Int}_V(S) \setminus \mathtt{Ker}(\alpha)$. Fixons un tel c. Plaçons-nous dans le cas où $\psi(c) > 0$ (le cas où $\psi(c) < 0$ est analogue). En considérant la fonction affine

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \psi\,(tc + (1-t)a) = t\psi(c) + (1-t)\psi(a)$$

on voit qu'il existe $\xi \in \mathtt{Ker}(\alpha) \cap]\,a, c\,[$. Or $]\,a, c\,[\subset \mathtt{Int}_V(S)$ (proposition 1), et par suite $\xi \in \mathtt{Ker}(\alpha) \cap \mathtt{Int}_V(S)$, ce qui est impossible d'après la première partie de la démonstration. Cette contradiction montre que $\mathtt{Ker}(\alpha)$ ne partage pas S (c'est donc un hyperplan d'appui de S puisque $0_V \in S$) ■

Supposons désormais V de dimension finie $n \geq 3$, et donnons-nous un cône convexe S de V à base compacte et d'intérieur non vide tel que toute génératrice frontière de S soit extrémale (cette hypothèse équivaut à la propriété que l'intersection de S avec tout hyperplan d'appui de S est ou $\{0_V\}$ ou réduite à une génératrice de S). Nous allons étudier les éléments de rang 1 de $\mathcal{N}_S$. Nous fixerons une fois pour toutes une base compacte C de S dans un hyperplan $\mathcal{H}$ tel que $0_V \notin \mathcal{H}$.

Soit $\alpha \in \mathcal{N}_S$ de rang 1. Si l'ensemble $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap S$ est $\neq \{0_V\}$, c'est nécessairement une génératrice frontière de S. En effet, en vertu de la proposition 7, il contient au moins une génératrice frontière Δ. Il ne peut en contenir d'autre, parce que S est saillant et que toute génératrice frontière est extrémale. On a d'abord:

Proposition 8

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, soit $\alpha \in \mathcal{N}_S$ de rang 1. Fixons un vecteur $v \in \mathtt{Im}(\alpha) \cap (S \setminus \{0_V\})$. Si $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap S = \{0_V\}$ ou si $v \in \mathtt{Int}_V(S)$, alors α n'est pas extrémal dans $\mathcal{N}_S$.

Démonstration:

Supposons d'abord que $v \in \mathtt{Int}_V(S)$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ tels que $\mathtt{Ker}(\alpha) \subset \mathtt{Ker}(f)$. C'est un sous-$\mathbb{R}$-e.v. de dimension n de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$. Fixons $a \in S$ tel que $\alpha(a) = v$. L'ensemble T des $f \in \mathcal{V}$ tels que $f(a) \in \mathtt{Int}_V(S)$ contient α et est ouvert dans $\mathcal{V}$, car l'application: $\mathcal{V} \to V$, $f \mapsto f(a)$ est continue. C'est donc un voisinage de α dans $\mathcal{V}$. Comme $\mathtt{Ker}(\alpha)$ ne partage pas S, on voit que $T \subset \mathcal{N}_S$. Puisque $n \geq 3$, il en découle immédiatement que α n'est pas élément extrémal de $\mathcal{N}_S$.

Supposons maintenant que $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap S = \{0_V\}$. Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ tels que $\mathtt{Im}(f) \subset \mathtt{Im}(\alpha)$. C'est un sous-$\mathbb{R}$-e.v. de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ de dimension n. Soit U l'ensemble des $f \in \mathcal{W}$ tels que $\mathtt{Ker}(f) \cap S = \{0_V\}$. On a $\alpha \in U$. Montrons que U est un ouvert de $\mathcal{W}$. Pour tout $f \in \mathcal{W}$, l'ensemble $f(C)$ est un compact convexe de V, et on a $f \in U$ ssi $0_V \notin f(C)$. Fixons une norme $\|\,.\,\|$ de V, et soit $|||\,.\,|||$ la norme associée dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$. Soit $f \in U$, soit δ_f la $\|\,.\,\|$-distance de 0_V à $f(C)$. Alors $\delta_f > 0$. Soit $R = \mathrm{Max}_{x \in C}(\|x\|)$ (donc $R > 0$). Soit $g \in \mathcal{W}$ telle que $|||f - g||| \leq \frac{\delta_f}{2R}$. Pour tout $x \in C$, on a $\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{\delta_f}{2R}\|x\| \leq \frac{\delta_f}{2}$, d'où $\|g(x)\| \geq \frac{\delta_f}{2}$ et donc $g(x) \neq 0_V$. Donc $0_V \notin g(C)$, i.e. $g \in U$, ce qui montre que U est voisinage de f. Ainsi U est voisinage de chacun de ses points, donc est bien ouvert dans $\mathcal{W}$. En particulier, U est un voisinage de α dans $\mathcal{W}$. Comme $n = \mathtt{dim}(\mathcal{W}) \geq 3$, il en découle que α n'est pas point extrémal de $\mathcal{N}_S$ ■

Ce n'est pas ici le lieu de discuter le *Théorème de Hahn-Banach*, dont on peut trouver partout des exposés élémentaires en dimension finie (en fait, pour les cas que nous aurons à considérer plus loin, le recours à ce théorème sera inutile). D'après ce théorème, pour tout $a \in \mathtt{Front}_{\mathcal{H}}(C)$, il existe dans $\mathcal{H}$ un hyperplan d'appui de C passant par a. On en déduit que pour toute génératrice frontière Δ de S, il existe au moins un hyperplan d'appui $\mathcal{A}$ de S la contenant. Pour un tel hyperplan, on a $\mathcal{A} \cap S = \Delta$

Proposition 9

Supposons, outre les hypothèses ci-dessus, que pour toute génératrice Δ de S, il existe un seul hyperplan d'appui de S contenant Δ. Soit $\alpha \in \mathcal{N}_S$ de rang 1 tel que $\mathtt{Ker}(\alpha) \cap S$ soit une génératrice Δ de S et tel que $\alpha(S)$ soit une génératrice frontière de S. Alors α est élément extrémal de $\mathcal{N}_S$.

Démonstration:

Fixons $v \in \mathtt{Im}(\alpha) \cap (S \setminus \{0_V\}$ et $a \in S$ tel que $\alpha(a) = v$. La génératrice $I = \mathbb{R}_+ v$ de S est frontière, donc extrémale. Soit $\beta \in \mathcal{N}_S$ et $\gamma \in \mathcal{N}_S$ non nuls et tels que $\alpha\beta + \gamma$. Pour tout $x \in S$, on a $\alpha(x) = \beta(x) + \gamma(x) = \lambda_x v$, avec $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$. Comme I est génératrice extrémale de S, et comme S est saillant, cela entraîne l'existence de $\mu_x \in \mathbb{R}_+$ et $\nu_x \in \mathbb{R}_+$ tels que $\beta(x) = \mu_x v$ et $\gamma(x) = \nu_x v$. Comme S engendre le $\mathbb{R}$-e.v. V, il en découle que β et γ sont de rang 1, et transforment S en I. Si $x \in \Delta$, on a $\beta(x) + \gamma(x) = \alpha(x) = 0_V$, donc $\mu_x = \nu_x = 0$, ce qui démontre que $\Delta \subset \mathtt{Ker}(\beta) \cap \mathtt{Ker}(\gamma)$. Mais $\mathtt{Ker}(\alpha)$, $\mathtt{Ker}(\beta)$ et $\mathtt{Ker}(\gamma)$ ne partagent pas S (proposition 7), donc sont des hyperplans d'appui de S. D'après l'hypothèse, on a donc $\mathtt{Ker}(\alpha) = \mathtt{Ker}(\beta) = \mathtt{Ker}(\gamma)$. Ayant même noyau et même image et étant de rang 1, les endomorphismes α, β et γ sont $\mathbb{R}$-proportionnels, ce qui prouve que α est élément extrémal de $\mathcal{N}_S$ ■

La synthèse de ce qui précède donne le théorème suivant:

Théorème 1

Soit V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 3$. Dans V, soit S un cône convexe pointé d'intérieur non vide et à base compacte. Supposons que toute génératrice frontière de S soit extrémale et ne soit contenue que dans un hyperplan d'appui de S. Alors les éléments extrémaux de $\mathcal{N}_S$ de rang 1 sont les $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)$ dont le noyau est un hyperplan d'appui de S contenant une génératrice frontière, dont l'image contient une génératrice frontière, et envoyant au moins un élément de $S \setminus \mathtt{Ker}(f)$ dans S.

Notons qu'un élément extrémal f de $\mathcal{N}_S$ de rang 1 est diagonalisable ssi on a $f^2 \neq 0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V)}$.

Proposition 10

Sous les hypothèses du théorème 1, le cône $\mathcal{N}_S$ n'admet aucun élément extrémal de rang 2.

Démonstration:

Soit $\alpha \in \mathcal{N}_S$ de rang 2. Notons P le plan $\mathtt{Im}(\alpha)$. Comme S engendre V, l'ensemble $P \cap S$ contient un ouvert de P, donc P rencontre $\mathtt{Int}_V(S)$ (car toute génératrice frontière de S est extrémale). On en déduit que $P \cap S$ est un cône convexe fermé saillant de P qui engendre le $\mathbb{R}$-e.v. P. Comme $\mathtt{dim}(P) = 2$, ce cône de P est l'intersection de deux demi-plans fermés de P limités par des droites vectorielles distinctes. L'ensemble $\mathtt{Front}_P(P \cap S)$ est union de deux demi-droites vectorielles fermées G_1 et G_2 non $\mathbb{R}$-colinéaires. On voit aisément que G_1 et G_2 sont deux génératrices frontières de S. Soit respectivement H_1 et H_2 les hyperplans d'appui de S contenant G_1 et G_2. On a $G_1 \cap H_2 = G_2 \cap H_1 = \{0_V\}$ puisque $P \cap \mathtt{Int}_V(S) \neq \emptyset$. Soit respectivement p_1 et p_2 la projection sur $\mathbb{R}G_1$ parallèlement à H_2 et sur $\mathbb{R}G_2$ parallèlement à H_1. Alors $p_1 \in \mathcal{N}_S$, $p_2 \in \mathcal{N}_S$, p_1 et p_2 sont de rang 1, et sont linéairement indépendants puisque G_1 et G_2 ne sont pas $\mathbb{R}$-colinéaires. On vérifie que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_1 = p_1\alpha$ et $\beta_2 = p_2\alpha$. On a $\beta_1 \in \mathcal{N}_S$ et $\beta_2 \in \mathcal{N}_S$ (car $\mathcal{N}_S$ est de manière évidente stable pour la composition des endomorphismes). De plus, $\mathtt{Im}(\beta_1) = \mathbb{R}G_1$ et $\mathtt{Im}(\beta_2) = \mathbb{R}G_2$, donc β_1 et β_2 sont linéairement indépendants. Donc α n'est pas extrémal dans $\mathcal{N}_S$ ■

Ellipsoïdes

Dans ce qui suit, on note V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 2$. Dans V, on appelle *ellipsoïde propre à points réels de centre* 0_V tout ensemble de la forme

$$\mathcal{E}_Q = \{x \in V \mid Q(x) = 1\}$$

où Q est une forme quadratique définie positive sur V. En abrégé, nous dirons simplement *ellipsoïde de centre* 0_V. L'ellipsoïde $\mathcal{E}_Q$ sera dit *défini par* Q.

Fixons Q, et munissons V de la structure euclidienne définie par Q. La norme associée $\sqrt{Q}$ sera notée $\|\,.\,\|$ et le produit scalaire associé sera noté $(.\,|\,.)$. Alors $\mathcal{E}_Q$ n'est autre que la sphère euclidienne de centre 0_V et de rayon 1 de l'espace euclidien $(V, (.\,|\,.))$. Nous noterons $\mathcal{B}_Q$ (resp. $\widetilde{\mathcal{B}}_Q$) la boule euclidienne ouverte $\{x \in V \,\big|\, \|x\| < 1\}$ resp. la boule euclidienne fermée $\{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$). Toutes les assertions qui suivent sont alors de vérification immédiate ou élémentaire.

$\widetilde{\mathcal{B}}_Q$ est un ensemble convexe compact, de frontière $\mathcal{E}_Q$ et d'intérieur $\mathcal{B}_Q$.

Par tout point $a \in \mathcal{E}_Q$, il passe un et un seul hyperplan d'appui de $\widetilde{\mathcal{B}}_Q$, c'est l'hyperplan $\mathcal{T}_a$ d'équation $(a \,|\, x) = 1$. On a $\mathcal{T}_a \cap \widetilde{\mathcal{B}}_Q = \{a\}$. L'hyperplan $\mathcal{T}_a$ est appelé l'*hyperplan tangent* à $\mathcal{E}_Q$ en a.

Tout point $a \in \widetilde{\mathcal{B}}_Q$ est point extrémal de $\widetilde{\mathcal{B}}_Q$ (cela résulte de la propriété précédente et de la propriété générale suivante, de démonstration triviale: *soit une partie convexe C de V et soit $a \in C$ tel qu'il existe un hyperplan d'appui $\mathcal{A}$ de C vérifiant $\mathcal{A} \cap C = \{a\}$. Alors a est point extrémal de C*).

Pour tout $c \in V$, le translaté $x + \mathcal{E}_Q$ de $\mathcal{E}_Q$ est appelé l'*ellipsoïde (affine) de centre c défini par Q*. Il est donc défini par l'équation $Q(x - c) = 0$. On laisse au lecteur le soin de transcrire à ce translaté les propriétés ci-dessus.

Remarquons que tout ce qui précède s'applique en dimension $n = 1$, mais il y a une différence importante: en dimension 1, l'ellipsoïde $\mathcal{E}_Q$ est un ensemble à deux éléments, alors qu'en dimension $n \geq 2$, c'est une sous-variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension $n - 1 \geq 1$ compacte, non vide et connexe, et en particulier un ensemble ayant la puissance du continu.

Cônes du second degré de Lorentz

Dans ce qui suit, on note V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie $n \geq 3$. Dans V, on appellera *cône du second degré de Lorentz* tout cône pointé de la forme

$$L_\Phi = \{x \in V \mid \Phi(x) = 0\}$$

où Φ est une forme quadratique sur V de signature $(n-1, 1)$ (donc en particulier non-dégénérée).

Fixons une telle forme Φ, dont nous noterons B la forme polaire. En utilisant une base Φ-orthogonale de V, on voit qu'on peut choisir un hyperplan vectoriel H tel que la forme quadratique $\Phi|_H$ soit définie positive. Fixons un tel H. Il est non-isotrope. Notons D sa droite Φ-orthogonale. On a donc $H \oplus D = V$. Nous noterons $Q = \Phi|_H$ et $f = -\Phi|_D$, de sorte que f est définie positive et que $\Phi(x+y) = Q(x) - f(y)$ pour tout $(x, y) \in H \times D$. Soit Ψ la forme quadratique définie sur V par $\Psi(x+y) = Q(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in H \times D$: elle est définie positive, donc définit sur V une structure euclidienne, dont nous noterons $(.\,|\,.)$ le produit scalaire. La restriction de ce produit scalaire à H est la forme polaire de Q. Les sous-espaces H et D sont supplémentaires Ψ-orthogonaux. Nous noterons v un élément de D tel que $f(v) = 1$ (l'ensemble $f^{-1}(1)$ est donc $\{v, -v\}$).

Pour étudier le cône L_Φ, il sera commode d'érire sous la forme $z = x + y$ un élément de V quelconque, avec $(x, y) \in H \times D$. Pour tous réels λ_1 et λ_2 et pour tous $x_1 \in H$ et $x_2 \in H$, on a, en posant $z_i = x_i + \lambda_i v$:

(1) $\qquad (z_1 \mid z_2) = (x_1 \mid x_2) + \lambda_1\lambda_2 \quad ; \quad B(z_1, z_2) = (x_1 \mid x_2) - \lambda_1\lambda_2$

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan affine d'équation $(z \mid v) = 1$: c'est l'hyperplan de direction H et qui passe par v. Dans $\mathcal{H}$, notons $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde d'équation $Q(z - v) = 1$, i.e. $\mathcal{E} = \{z \in \mathcal{H} \mid Q(z - v) = 1\}$, et notons C l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$. D'après l'étude vue plus haut, C est une partie convexe compacte, de frontière $\mathcal{E}$, d'intérieur non vide égal à $\{z \in \mathcal{H} \mid Q(z - v) < 1\}$, tout point $a \in \mathcal{E}$ est extrémal sur C et par un tel point a, il passe un et un seul hyperplan d'appui de C, qui est défini par l'équation $(z \mid a - v) = 1$.

Soit V_v le demi-espace fermé de V limité par H et contenant v.

Proposition 11

L'ensemble $L_\Phi \cap V_v$ est le cône pointé engendré par $\mathcal{E}$.

Démonstration:

Il est clair que $L_\Phi \cap H = \{0_V\}$ (car Q est définie positive). Soit $\zeta \in V_v \setminus H$. On a donc $\zeta = \xi + tv$, avec $\xi \in H$ et $t \in \mathbb{R}_+^\star$. La demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+\zeta$ rencontre $\mathcal{H}$ en un point unique, qui est $z = \frac{1}{t}\xi + v$. La condition $\zeta \in L_\Phi$ équivaut à $Q(\xi) - f(tv) = 0$, c'est-à-dire à $Q(\xi) - t^2 = 0$. Comme $\frac{1}{t^2}Q(\xi) = Q\left(\frac{1}{t}\xi\right)$, cette condition équivaut encore à $Q(z - v) = 1$, i.e. à $z \in \mathcal{E}$. La proposition en découle ∎

Comme C est l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$, on vérifie aisément que l'enveloppe convexe de $L_\Phi \cap V_v$ est le cône pointé engendré par C. C'est donc un cône pointé à base compacte, et en particulier c'est un cône fermé. On le notera $S_{\Phi,v}$. En utilisant les résultats précédents et notamment la proposition 3, on obtient:

Proposition 12

*L'intérieur de $S_{\Phi,v}$ est non vide, et c'est le cône épointé engendré par $\mathtt{Int}_{\mathcal{H}}(C)$, c'est donc l'ensemble des $z \in V_v$ tels que $\Phi(z) < 0$. La frontière de $S_{\Phi,v}$ est $L_\Phi \cap V_v$. Toute génératrice frontière de $S_{\Phi,v}$ est extrémale. Etant donnée une génératrice frontière Δ de $S_{\Phi,v}$, il existe un hyperplan d'appui et un seul de $S_{\Phi,v}$ contenant Δ. Fixant $\zeta \in \Delta \setminus \{0_V\}$, cet hyperplan d'appui est défini par l'équation $B(\zeta, z) = 0$. Les hyperplans d'appui A de $S_{\Phi,v}$ tels que $A \cap S_{\Phi,v} \neq \{0_V\}$ sont les hyperplans vectoriels Φ-isotropes (on les appelle les **hyperplans tangents** à L).*

Démonstration:

Seule les deux dernières assertions demandent justification. On ne perd pas de généralité en supposant $\zeta \in \mathcal{E}$. On posera $\xi = \zeta - v$ (donc $\xi \in H$). L'hyperplan d'appui $\mathcal{A}$ de C *dans* $\mathcal{H}$ est défini par l'équation $(z \mid \xi) = 1$. L'hyperplan d'appui A de $S_{\Phi,v}$ contenant Δ est donc l'unique hyperplan vectoriel contenant $\mathcal{A}$. Soit $z = x + tv \in V_v$, où $(x,t) \in H \times \mathbb{R}$. On a donc $z \in A$ ssi $\left(\frac{1}{t}x + v \mid \xi\right) = 1$, ce qui équivaut à $(x \mid \xi) - t = 0$, donc, en vertu de (1), à $B(z,\zeta) = 0$. La forme linéaire $z \mapsto B(z,\zeta)$ sur V est non nulle (car B est non dégénérée). D'après ce qu'on vient de voir, elle s'annule sur un ouvert non vide de l'hyperplan A. Donc elle est nulle sur tout A: une équation de A est donc $B(\zeta, z) = 0$. L'hyperplan A est Φ-isotrope puisque $\Phi(\zeta) = B(\zeta,\zeta) = 0$. Notons que son intersection avec $S_{\Phi,v}$ est $\mathbb{R}_+\zeta$.

Soit $\mathcal{A}$ un hyperplan d'appui de $S_{\Phi,v}$ *affine*, d'espace directeur A. Dans le cas où $A \cap S_{\Phi,v} = \{0_V\}$, nécessairement $\mathcal{A}$ est dans le demi-espace limité par A qui contient $S_{\Phi,v}$, et cela entraîne $\mathcal{A} = A$ (sinon il est clair que $\mathcal{A}$ partagerait $S_{\Phi,v}$). Plaçons-nous maintenant dans le cas où $A \cap S_{\Phi,v}$ contient un vecteur non nul ζ. Supposons que A partage $S_{\Phi,v}$, alors A rencontrerait $\mathtt{Int}_V(S_{\Phi,v})$, car $S_{\Phi,v}$ est l'adhérence de son intérieur. Soit alors $\xi \in A \cap V_v$ tel que $\Phi(\xi) < 0$, et soit $a \in \mathcal{A}$. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\Phi(a + t\xi) = \Phi(\xi)t^2 + 2B(a,\xi)t + \Phi(a)$$

d'où l'on déduit que pour tout réel $t > 0$ assez grand, on a $\Phi(a + t\xi) < 0$. Donc $\mathcal{A}$ rencontrerait $\mathtt{Int}_V(S_{\Phi,v})$, ce qui contredit que $\mathcal{A}$ est hyperplan d'appui. Cela prouve que A ne partage pas $S_{\Phi,v}$, donc A est hyperplan d'appui de $S_{\Phi,v}$. Comme $\mathbb{R}_+\zeta \subset A$, l'hyperplan A est l'unique hyperplan d'appui contenant ζ, i.e. le B-orthogonal de ζ. Il est alors immédiat que $\mathcal{A} = A$.

Enfin soit A un hyperplan vectoriel Φ-isotrope de V. Il existe $\zeta \in A \cap (V_v \setminus \{0_V\})$ tel que $B(\zeta, x) = 0$ pour tout $x \in A$. La forme linéaire $\psi = B(\zeta, .)$ est non nulle car B est non-dégénérée, donc $A = \mathtt{Ker}(\psi)$, autrement dit A est l'hyperplan d'appui de la génératrice $\mathbb{R}_+\zeta$ de $S_{\Phi,v}$ ■

☆ ☆ ☆