Topologie
350 exercices
12 problèmes

D'après P. Tauvel.
Université de Poitiers 1987-1988. Mis en forme du polycopié, examens compléments variés par Jean-Éric Richard.

Jean-éric RICHARD
14 décembre 2022

Retour page 1

Table des matières

Chapitre I

Espaces Topologiques

Ex. 1. ./espacestopo/exo-1/texte.tex

Soit $X = \{a\ ,\ b\}$ un ensemble à deux éléments. Montrer qu'il existe quatre topologies sur X.

Ex. 2. ./espacestopo/exo-2/texte.tex

Soit X un ensemble infini, et $a \in X$. On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des parties A de X qui vérifient l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

i) $a \notin A$.

ii) $a \in A$ et $\complement A$ est fini.

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur X.
2. Soit B une partie de X. Déterminer l'adhérence de B dans X.

Ex. 3. ./espacestopo/exo-3/texte.tex

Soit X un ensemble infini. On désigne par $\mathscr{T}$ l'ensemble des parties A de X qui vérifient l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

i) $A = \emptyset$.

ii) ${}^cA$ est au plus dénombrable.

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur X.
2. Quelles sont, dans X, les suites convergentes ?

Ex. 4. ./espacestopo/exo-4/texte.tex

Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^\star$ ou qui vérifient la propriété suivante :
si $A \subset \mathbb{N}^\star$ est non vide, on a $A \in \mathscr{T}$ si, et seulement si, pour tout $n \in A$, les diviseurs de n appartiennent à A.

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie sur $\mathbb{N}^\star$. Est-elle séparée ?
2. Soit f une application de $\mathbb{N}^\star$ dans lui-même. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) f est continue.

   ii) pour tous $m,\ n \in \mathbb{N}^\star$ tels que m divise n, $f(m)$ divise $f(n)$.

Ex. 5. ./espacestopo/exo-5/texte.tex

On pose $I(+\infty) = \mathbb{R}_+$, et pour $a \in \mathbb{R}_+,\ I(a) = [0\,;a[$.

1. Montrer que $\mathscr{T} = \{I(a)\ ;\quad 0 \leqslant a \leqslant +\infty\}$ est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'adhérence de $\{x\}$.
3. Soit E un espace topologique séparé. Déterminer $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\ E)$

Ex. 6. ./espacestopo/exo-6/texte.tex

Soit T l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ qui sont vides ou qui vérifient la propriété suivante :
pour tout $x \in A$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y < x$, et $]y\,;x] \subset A$.

1. Montrer que T est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer T et la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
3. Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$ tels que $y < x$. Déterminer l'adhérence, pour T, de $[y\,;x[$.
4. Pour la topologie T, $\mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Ex. 7. ./espacestopo/exo-7/texte.tex

Soit T l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ qui sont vides ou qui vérifient :
pour tout $x \in A$, il existe $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $]x-a\,;x+a[\cap\mathbb{Q} \subset A$.

1. Montrer que T est une topologie sur $\mathbb{R}$. Comparer T et la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

2. Pour $a,\ b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, déterminer l'adhérence de $]a\,;b[\cap\mathbb{Q}$ pour T.

Ex. 8. ./espacestopo/exo-8/texte.tex

On appelle **base de la topologie** d'un ensemble topologique E tout ensemble $\mathscr{B}$ de parties ouvertes de E tel que tout ouvert de E soit réunion d'ensembles appartenant à $\mathscr{B}$.
On dit que E est **à base dénombrable** si sa topologie possède une base dénombrable $\mathscr{B}$.

1. Soient X un ensemble et $\mathscr{B}$ un ensemble de parties de X. A quelle condition nécessaire et suffisante $\mathscr{B}$ forme t-il une base d'une topologie sur X ?

2. Montrer que $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est à base dénombrable.

Ex. 9. ./espacestopo/exo-9/texte.tex

Soit X un ensemble ordonné. Pour $x \in X$, on pose :

$$[x\,;\rightarrow[= \{y \in X\ ;\ x \leqslant y\} \qquad]\leftarrow;x] = \{y \in X\ ;\ y \leqslant x\}.$$

1. Montrer que L'ensemble des $[x\,;\rightarrow[$, $x \in X$ est une base d'une topologie sur X appelée **topologie droite**.
2. Montrer que l'ensemble des $]\leftarrow;x]$, $x \in X$, une base d'une topologie sur X, appelée **topologie gauche**.
   Dans 1a suite, X est munit de la topologie droite.
3. Montrer que toute intersection d'ouverts de X est un ouvert de X.
4. Soit $x \in X$. Déterminer l'adhérence de $\{x\}$ dans X.

Ex. 10. ./espacestopo/exo-10/texte.tex

Espace de Kolmogoroff

On dit qu'un espace topologique est un **espace de Kolmogoroff** s'il vérifie la propriété suivante :
pour deux points distincts x et y de E, il existe un voisinage de l'un de ces points qui ne contient pas l'autre.

1. Montrer qu'un ensemble ordonné muni de la topologie droite est un espace de Kolmogoroff.
2. Soit E un espace de Kolmogoroff dans lequel toute intersection d'ouverts est un ouvert.
   Montrer que la relation $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \in \overline{\{y\{}$ est une relation d'ordre sur E, et que la topologie de E est identique à la topologie droite sur E déterminée par cette relation.
3. Soit E un espace de Kolmogoroff. Montrer que toute partie finie non vide de E contient au moins un point isolé.
   Montrer que si E ne contient pas de point isolé, tout ouvert non vide de E est un ensemble Infini.

Ex. 11. ./espacestopo/exo-11/texte.tex

1. Soit E un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Quels que soient les points distincts x et y de E, il existe $V \in \mathbf{V}_E(x)$ tel que $y \notin V$.
   ii) Toute partie de E réduite à un point est fermée.
   iii) Pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages de x est réduite à $\{x\}$.

   Espace topologique accessible

   Un espace topologique est dit **accessible** s'i1 les conditions précédentes.

   Dans la suite, E désigne un espace topologique accessible, A une partie de E.
2. Soit $x \in \overline{A} - A$. Montrer que, si $V \in \mathbf{V}_E(x)$, $V \cap A$ est un ensemble infini.
3. Soit B l'ensemble des $x \in \overline{A}$ tels que $V \cap A$ soit infini pour tout $V \in \mathbf{V}_E(x)$. Montrer que B est ferné dans
4. Prouver que l'intersection des voisinages de A est égal à A.

Ex. 12. ./espacestopo/exo-12/texte.tex

Soit E un espace topologique accessible.

1. Montrer que, si toute intersection d'ouverts de E est un ouvert, la topologie de E est discrète.
2. On suppose que la topologie de E est engendrée par un nombre fini de parties de E. Prouver E est fini, et que sa topologie est discrète.

Ex. 13. ./espacestopo/exo-13/texte.tex

Soit E un ensemble ordonné muni de la topologie droite. Prouver l'équivalence des conditions suivantes :

i) E est un espace topologique accessible.

ii) Deux éléments distincts de E ne sont pas comparables.

iii) La topologie de E est discrète.

Ex. 14. ./espacestopo/exo-14/texte.tex

Soit E un espace topologique base dénombrable.

1. Soit F l'ensemble des points de E qui ne possèdent aucun voisinage dénombrable. Montrer que F est fermé et sans point isolé.
2. Prouver que ${}^cF$ est dénombrable.

Ex. 15. ./espacestopo/exo-15/texte.tex

1. Soit E espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) Pour tout $\in E$, l'ensemble des voisinages fermés de x est système fondamental de voisinages de x.
   ii) Pour tout fermé F de E et tout $x \in^c F$, il existe un voisinage de F et un voisinage de x sans point commun.
   iii) Pour tout fermé F de E, L'intersection des voisinages fermés de F est égale à F.

   Espace topologique régulier

   on dit qu'un **espace topologique est régulier** s'il est séparé, et s'i1 vérifie les conditions équivalentes précédentes.

2. Montrer que tout espace de Kolmogoroff vérifiant la condition 1i est séparé, et par suite régulier.
3. Former sur un ensemble à trois éléments une topologie non séparée vérifiant la condition 1i.

Ex. 16. ./espacestopo/exo-16/texte.tex

Soit E un espace topologique.

Espace topologiqe séparable

On dit que E est **séparable** s'i1 contient une partie dense dénombrable.

On considère les propriétés suivantes :

i) E est à base dénombrable.

ii) E est séparable.

iii) Toute partie de E dont les points sont isolés est dénombrable.

iv) Toute ensemble de parties ouvertes de E deux à deux disjointes est dénombrable.

Prouver les Implications : i)$\Longrightarrow$ ii)$\Longrightarrow$ iv), i)$\Longrightarrow$ iii)$\Longrightarrow$ iv).

Ex. 17. ./espacestopo/exo-17/texte.tex

Soit $B = \{[a\,;b[\ ;\quad a,\ b \in \mathbb{R}\ ;\quad a < b\}$.
Montrer que B est une base d'une topologie T sur $\mathbb{R}$.
On munit de la topologie T. Prouver que tout élément de B est fermé.
Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc que $\mathbb{R}$ est séparable pour T.
Vérifier que T n'est pas à base dénombrable.
En déduire que l'Implication ii)$\Longrightarrow$ ii) de l'exercice 16 est en général inexacte.

Ex. 18. ./espacestopo/exo-18/texte.tex

Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle **opération de fermeture** sur X toute application u de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même qui vérifie, pour tous $M,\ N \in \mathscr{P}(X)$ les propriétés suivantes :

i) $u(\varnothing) = \varnothing$.

ii) $M \subset u(M)$.

iii) $u(u(M)) = u(M)$.

iv) $u(M \cup N) = u(M) \cup u(N)$.

1. Soit u une opération de fermeture sur X. Montrer qu'il existe une topologie et une seule sur X, telle que, pour tout $M \in \mathscr{P}(X)$, $u(M)$ soit l'adhérence de M pour cette topologie.
   Dans la suite, u et v désigne des opérateurs de fermeture sur X. On note $w = v \circ u$, S et T sont les topologies définies sur X par u et v, et on suppose que, pour tout $M \in \mathscr{P}(X)$, $w(M)$ est fermé pour S.
2. Prouver que w est une opération de fermeture sur X.
3. Soit $M \in \mathscr{P}(X)$. Montrer que $w(M)$ est l'intersection des ensembles qui contiennent M et qui sont fermés pour S et T. Prouver que $u \circ v(M) \subset v \circ u(M)$.

Ex. 19. ./espacestopo/exo-19/texte.tex

Soit E un espace topologique.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i) Toute famille d'ouverts de E, ordonnée par inclusion, possède un élément maximal.
   ii) Toute suite croissante d'ouverts E est stationnaire.
   iii) Pour tout ouvert U de E et toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $U \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une partie finie J de I, telle que $U \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.
2. On suppose que E vérifie les conditions précédentes. Montrer que, si E est séparé, il est fini.

Ex. 20. ./espacestopo/exo-20/texte.tex

Soit E un espace topologique. Pour toute partie A de E, on pose :

$$r(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}, \qquad s(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}.$$

Ensemble régulier

Un ouvert (resp. fermé) A de E est dit **régulier** si $r(A) = A$ (resp. $s(A) = A$).

1. Soient $A,\ B \in \mathscr{P}(E)$ tel que $A \subset B$. Montrer que $r(A) \subset r(B)$, $s(A) \subset s(B)$.
2. Prouver que, si A est ouvert et B fermé, on a $A \subset r(A)$ et $s(B) \subset B$.
3. Montrer que, pour $A \in \mathscr{P}(E)$, on a $r(r(A)) = r(A),\ s(s(A)) = s(A)$.
4. Soient $A,\ B$ des ouverts de E tels que $A \cap B = \varnothing$. Montrer que $r(A) \cap r(B) = \varnothing$.
5. Montrer que si $A,\ B$ sont des ouverts réguliers, $A \cap B$ est un ouvert régulier.
6. Prouver que si $A,\ B$ sont des fermés réguliers, $A \cup B$ est un fermé régulier.

Ex. 21. ./espacestopo/exo-21/texte.tex

Soit E un espace topologique et A on sous ensemble de E.On dit que A est **résiduel** si $\overline{{}^cA} = E$ et que A est **non dense** si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

1. Montrer qu'un ensemble non dense est résiduel.
2. Montrer que A est non dense si, et seulement si, $A \subset \overline{{}^c(\overline{A})}$.
3. Montrer que la réunion d'un ensemble non dense et d'un ensemble résiduel est un ensemble résiduel.
4. Montrer que, si A est ouvert ou fermé, $\mathrm{Fr}(A)$ est un ensemble non dense.
5. Montrer que pour toute partie A de E, $\overline{A} \cap {}^cA$ et $A \cap \overline{{}^cA}$ sont résiduels.
6. Prouver que, pour toute partie A de E, $\mathrm{Fr}(A)$ est réunion de deux ensembles résiduels.

Ex. 22. ./espacestopo/exo-22/texte.tex

Soient E un espace topologique non vide et A une partie de E.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$.

ii) Pour toute partie U de E, dense dans E, $A \cap U \neq \varnothing$.

Ex. 23. ./espacestopo/exo-23/texte.tex

Soit E un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.
Montrer que si $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ est fermé dans E, on a $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

Ex. 24. ./espacestopo/exo-24/texte.tex

Montrer que si une partie A d'un espace topologique n'a pas de point isolé, il en est de même de son adhérence.

Ex. 25. ./espacestopo/exo-25/texte.tex

Soient E un espace topologique et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties de E vérifiant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \varnothing$.

Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x dans E tel que $V \cap A_n = \emptyset$ pour presque tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 26. ./espacestopo/exo-26/texte.tex

Soit E un espace topologique. Montrer que si E est la seule partie dense de E, E est discret.

Ex. 27. ./espacestopo/exo-27/texte.tex

Soient E un espace topologique, A et B des parties denses de E.

1. Montrer que si A et B sont ouverts, alors $A \cap B$ est dense dans E.
2. La propriété 1 est-elle encore vraie si on ne suppose plus que A et B sont ouverts ?

Ex. 28. ./espacestopo/exo-28/texte.tex

Montrer que si un espace topologique fini est séparé, il est discret.

Ex. 29. ./espacestopo/exo-29/texte.tex

Soit E un espace topologique, A et B deux parties de E telles que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.
Montrer que, si $A \cup B$ est fermé, alors A et B sont fermés.

Ex. 30. ./espacestopo/exo-30/texte.tex

Soient E un espace topologique, A et B des parties de E.

1. Montrer que si $A \cap B = \varnothing$, on a $\overline{A} \cap \overset{\circ}{\overline{B}} = \varnothing$.
2. Montrer que si $A \cup B = E$, $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = E$.

Ex. 31. ./espacestopo/exo-31/texte.tex

Soient E, F deux espaces topologiques et $f \in \mathscr{F}(E,\ F)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) pour toute partie A de E, on a $f(\overline{A}) \subset f(A)$.

ii) pour toute partie B de F, $f^{-1}(B)$ est ouvert et fermé dans E.

Ex. 32. ./espacestopo/exo-32/texte.tex

Soient E un espace topologique et A une partie de E.

1. Soit U un ouvert de E tel que $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap U \neq \varnothing$. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap U \cap A \neq \varnothing$
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   i) $\overset{\circ}{\overline{A}} = \varnothing$.

   ii) Le seul ouvert U de E tel que $U \subset \overline{U \cap A}$ est l'ouvert vide.

Ex. 33. ./espacestopo/exo-33/texte.tex

Soit U une partie d'un espace topologique E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) U est ouvert dans E.

ii) Pour toute partie A de E, et si D est dense dans E, on a $\overline{U} = \overline{D \cap U}$.

Ex. 34. ./espacestopo/exo-34/texte.tex

1. Donner un exemple de parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}$ soient deux à deux distincts.
2. Donner un exemple de deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $I\cap\overline{J}\not\subset\overline{I\cap J}$.

Ex. 35. ./espacestopo/exo-35/texte.tex

Point extérieur & extérieur d'une partie

Soit E un espace topologique, et A une partie de E.
Un point $x\in E$ est dit **extérieur** à A, s'il existe un ouvert U contenant x tel que $U\subset^c A$.
L'ensemble de tous les points extérieur de A forment **l'extérieur** de A, noté $\mathrm{ext}(A)$.
On peut noter qu'un point extérieur de A est un point de $\overset{\circ}{\widehat{{}^cA}}$.

Soient E un espace topologique, A une partie de E, $\mathrm{ext}(A)$ l'extérieur de A, $B=A\cup\mathrm{ext}(A)$.
Montrer que B est dense dans E.

Ex. 36. ./espacestopo/exo-36/texte.tex

Soient E un espace topologique et A une partie de$E$.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$ si, et seulement si A est ouvert et fermé dans E.
2. Montrer que, si A est fermé, on a $[\mathrm{Fr}(A)]^\circ=\varnothing$.
3. Prouver que $\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}\,[\mathrm{Fr}(A)]]=\mathrm{Fr}\,[\mathrm{Fr}(A)]$.
4. Montrer que $\mathrm{FR}(\mathring{A})\subset\mathrm{Fr}(A)$ et que $\mathrm{Fr}(\overline{A})\subset\mathrm{Fr}(A)$.

Ex. 37. ./espacestopo/exo-37/texte.tex

Soient E un espace topologique, A, B des parties de E. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\mathrm{Fr}(A\cap B)\subset\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.
2. $\mathrm{Fr}(A\cup B)\subset\mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(B)$.
3. $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)\subset\mathrm{Fr}(A\cap(B)$.

Ex. 38. ./espacestopo/exo-38/texte.tex

Soient E un espace topologique, A, B des parties de E telles que $\mathrm{Fr}(A)\cap\mathrm{Fr}(B)=\varnothing$.
Établir :

1. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
2. $\mathring{A}\cup\mathring{B}=\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.
3. $\mathrm{Fr}(A\cap B)=\left[\mathrm{Fr}(A)\cap\overline{B}\right]\cup\left[\mathrm{Fr}(B)\cap\overline{A}\right]$.

Ex. 39. ./espacestopo/exo-39/texte.tex

Soient E un espace topologique, A, B, C des parties de E telles que $C\subset A\cup B$. Montrer que, si C est ouvert (resp. fermé) par A et B, C est ouvert (resp. fermé) par rapport à $A\cup B$.

Ex. 40. ./espacestopo/exo-40/texte.tex

Soient E un espace topologique, F partie de E munie de la topologie induite, et A une partie de F. Montrer que

$$\mathrm{adh}_F(A)=\overline{A}\cap F\qquad;\qquad\mathring{A}=\mathring{F}\cap\mathrm{int}_F(A)\qquad;\qquad\mathrm{Fr}_F(A)\subset F\cap\mathrm{Fr}(A).$$

Ex. 41. ./espacestopo/exo-41/texte.tex

Soient E un espace topologique, D une partie dense de E, A une partie de E, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E.

1. Soient $x\in D$, et W un voisinage de x dans D. Montrer que $\overline{W}$ est un voisinage de x dans de E (on pourra utiliser l'exercice 33).
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) A est fermé dans E.
   ii) Pour tout $i\in I$, $A\cap U_i$, est fermé dans U_i
3. A-t-on une équivalence analogue à celle de 2. pour une partie ouverte de E ?

Ex. 42. ./espacestopo/exo-42/texte.tex

Soit E un espace topologique.

Point d'accumulation et ensemble dérivé

Si A est une partie de E, on dit que $x \in E$ est point d'accumulation de A si, pour tout $V \in V_E(x)$, $V \cap A$ contient un point distinct de x.
On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A, et on dit que A' est l'ensemble dérivé de A.

On pose $A^{(1)} = A'$, et on définit $A^{(n)}$ par récurrence par $A^{(n)} = (A^{(n-1)})'$.

1. Prouver que $\overline{A}$ est réunion disjointe de A' et de l'ensemble des points isolés de A.
2. Montrer que, si A est fermé, on a $A' = \varnothing$ si seulement si, A est un espace discret.
   Cette équivalence est-elle encore vraie si A n'est pas supposé fermé ?
3. Soient A, B des parties de E. Etablir : $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
4. On suppose E séparé. Montrer que A' est fermé. En déduire que $(A')' \subset A'$.
5. Dans la suite, on suppose que $E = \mathbb{R}$. On pose

$$A_0 = \{0\}, \quad A_k = \left\{ \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} \ ; \ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^\star \right\}.$$

   Déterminer $A_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^\star$.

   On pose $B_0 = A_0$, $B_k = A_k \cap \left[0 \,;\, \frac{1}{k}\right[$, $k \in \mathbb{N}^\star$, $B = \bigcup_0^\infty B_k$.

   Déterminer $B^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^\star$, et $\bigcap_1^\infty B^{(n)}$.

Ex. 43. ./espacestopo/exo-43/texte.tex

Soit E un espace topologique. On dit qu'une partie L est **localement fermée** si, pour tout $x \in L$, il existe $V \in V_E(x)$ tel que $V \cap L$ soit fermé de V.

1. Soit L une partie de E. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) L est localement fermée.
   ii) L est ouverte dans $\overline{L}$.
   iii) $\overline{L} \backslash L$ est fermé dans E.
   iv) L est l'intersection d'un ouvert de E et d'un fermé de E.
2. Montrer que l'intersection d'un nombre fini de parties localement fermés de E est une partie localement fermée de E.
3. Soient $U = \left\{(x \,;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y > 0\right\}$, $V = \{(0 \,;\, 0)\}$. Prouver que U et V sont localement fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais que $U \cap V$ ne l'est pas.

Ex. 44. ./espacestopo/exo-44/texte.tex

Soient E un espace topologique, F et G des sous-espaces de E tels que $E = F \cup G$. On pose $A = F \cap^c G$, $B = G \cap^c F$ et on suppose que $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$.

1. Soit M une partie de E. Établir :
$$\overline{M} = \mathrm{adh}_F(M \cap F) \cup \mathrm{adh}_G(M \cap G).$$
2. Montrer que, si $M \cap F$ est fermé (resp. ouvert) dans F et $M \cap G$ fermé (resp. ouvert) dans G, alors M est fermé (resp. ouvert) dans E.

Ex. 45. ./espacestopo/exo-45/texte.tex

Soient E un espace topologique, A un fermé de E, U un ouvert de A, et V un ouvert de E contenant U.
Montrer que $U \cup (V \cap^c A)$ est un ouvert de E.

Ex. 46. ./espacestopo/exo-46/texte.tex

Soient E un espace topologique A, B des parties de E telles que $A \subset B$.
On suppose que A est dense dans B. Montrer que A est dense dans $\overline{B}$.

Ex. 47. ./espacestopo/exo-47/texte.tex

Soient E un espace topologique, F un fermé de E, A une partie de E, et W un voisinage de $A \cap F$ dans F.
Prouver que $A \cap \overline{F \cap^c W} = \varnothing$.

Ex. 48. ./espacestopo/exo-48/texte.tex

Soient E un espace topologique, F, G des fermés de E, U un ouvert de G, A une partie de F.
On suppose que $E = F \cup G$, $A \cap G \subset U$. Prouver que $A \subset \overset{\circ}{\widehat{F \cup U}}$.

Ex. 49. ./espacestopo/exo-49/texte.tex

Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé de E.
On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $V \in V_E(x)$ ne recouvrant qu'un nombre fini de A_i.
Soient $a \in E$, et $i_1, \dots, i_n$ les éléments de I tels que $a \in A_i$,. Pour $k = 1, \dots, n$, soit V_k un voisinage de a dans A_{i_k}.
Montrer que $V_1 \cup \dots \cup V_n \in V_E(a)$.

Ex. 50. ./espacestopo/exo-50/texte.tex

Soient E, F deux espaces topologiques, U (resp. V) l'ensemble des ouverts de E (resp. F).
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $T = \{A \times B \ ; \ A \in U, \ B \in V\}$ soit une topologie sur $E \times F$.

Ex. 51. ./espacestopo/exo-51/texte.tex

Soient E un espace topologique, $\Delta = \{(x \ ; \ x) \ ; \ x \in E\} \subset E \times E$.
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est séparé.

ii) Δ est fermé dans $E \times E$.

Ex. 52. ./espacestopo/exo-52/texte.tex

1. Soit $\mathscr{B} = \{]a\,;b] \ ; \quad a, b \in \mathbb{R} \ ; \quad a < b\}$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur $\mathbb{R}$.
   On munit $\mathbb{R}$ de cette topologie.
2. Prouver que la topologie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'est pas discrète.
3. Soit $E = \left\{(x \ ; \ y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \quad x + y = 1\right\}$. Montrer que E est discret.

Ex. 53. ./espacestopo/exo-53/texte.tex

Soit S l'ensemble $\{0 \ ; \ 1\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0 \ ; \ 1\}$.
On munit $S \times S$ de la topologie produit. L'ensemble $S \times \{0\}$ est-il fermé dans $S \times S$?

Ex. 54. ./espacestopo/exo-54/texte.tex

Soient E, F, G trois espaces topologiques, A une partie de $E \times F$, B une partie de $F \times G$.
On note $A \circ B$ l'ensemble des couples $(x \ ; \ z) \in E \times G$ pour lesquels il existe $y \in F$ tel que $(x \ ; \ y) \in A$ et $(y \ ; \ z) \in B$.
Montrer que si A est ouverte dans $E \times F$, et B ouverte dans $F \times G$, $A \circ B$ est ouverte dans $E \times G$.

Ex. 55. ./espacestopo/exo-55/texte.tex

Soient E et F deux espaces topologiques, $E \times F$ l'espace topologique produit, A une partie de E, F une partie de F.
Établir :

1. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

2. $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

3. $\mathrm{Fr}(A \times B) = \left[\mathrm{Fr}(A) \times \overline{B}\right] \cup \left[\overline{A} \times \mathrm{Fr}(B)\right]$.

Chapitre II

Limites. Continuité.

Ex. 1. *./limitesconti/exo-1/texte.tex*

Soient X, Y deux ensembles non vides, $\mathscr{A}$ une base de filtre sur X, $\mathscr{B}$ une base de filtre sur Y, f une application de X dans Y.

1. Montrer que $\{A \times B \ ; \ A \in \mathscr{A}, \ B \in \mathscr{B}\}$ est une base de filtre sur $X \times Y$.
2. On pose $f(\mathscr{A}) = \{f(A) \ ; \ A \in \mathscr{A}\}$.Montrer que $f(\mathscr{A})$ est une base de filtre sur Y. Si $\mathscr{A}$ est un filtre sur X, à quelle condition $f(\mathscr{A})$ est-il un filtre sur Y ?
3. On pose $f^{-1}(\mathscr{B}) = \left\{f^{-1}(B) \ ; \ B \in \mathscr{B}\right\}$. Á quelle condition $f^{-1}(\mathscr{B})$ est-il une base de filtre sur X ?
4. Montrer que $f^{-1}(f(\mathscr{A}))$ est une base de filtre sur X.
   Comparer les éléments de $f^{-1}(f(\mathscr{A}))$ et de $\mathscr{A}$.
5. suppose que $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une base de filtre sur X. Comparer les éléments de $f(f^{-1}(\mathscr{B}))$ et de $\mathscr{B}$.

Ex. 2. *./limitesconti/exo-2/texte.tex*

Soit X un ensemble infini, et $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties A de $\mathscr{F}$ telles que $\complement A$ soit fini.
Montrer que $\mathscr{F}$ est un filtre sur X. (pour $X = \mathbb{N}$, on dit que $\mathscr{F}$ est le filtre de Fréchet).

Ex. 3. *./limitesconti/exo-3/texte.tex*

Soient X ensemble, $\mathscr{F}$ un filtre sur X, A une partie de X.
La trace $\mathscr{F}_A$ de $\mathscr{F}$ sur X est l'ensemble des parties $A \cap B$, avec $B \in \mathscr{F}$.
Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathscr{F}_A$ est un filtre sur A.

ii) $A \cap B \neq \varnothing$ pour tout $B \in \mathscr{F}$.

Ex. 4. *./limitesconti/exo-4/texte.tex*

Soient X un ensemble, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux filtres sur X. On dit que $\mathscr{F}$ est plus fin que $\mathscr{G}$, et on écrit $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{G}$ si tout élément de$\mathscr{G}$ appartient à $\mathscr{F}$.
On définit ainsi une relation d'ordre sur 1'ensemble des filtres sur X.

1. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de filtres sur X. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties A de X appartenant à tous les $\mathscr{F}_i$. Montrer que $\mathscr{F}$ est un filtre sur X, et que c'est la borne inférieure des $\mathscr{F}_i$ dans l'ensemble ordonné des filtres sur X.
   On dit que $\mathscr{F}$ est le filtre intersection de la famille $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$, et on écrit $\mathscr{F} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$.
2. Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux filtres sur X. Montrer que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \{M \cup N \ ; \ M \in \mathscr{F}, \ N \in \mathscr{G}\}$.
3. Soit A un ensemble de parties de X. Montrer qu'il existe un filtre $\mathscr{F}$ contenant A si, et seulement si, aucune des intersections finie d'ensemble de A n'est vide.
   En déduire, si A est une partie de X, et $\mathscr{F}$ un filtre sur X, il existe un filtre contenant A et plus fin que $\mathscr{F}$ si, et seulement si, $A \cap B \neq \varnothing$ pour tout $B \in \mathscr{F}$.
4. On suppose $X \neq \varnothing$. Soit S un ensemble de filtres sur X. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   i) S admet une borne supérieure dans l'ensemble ordonné des filtres sur X.
   ii) Pour toute famille finie $\mathscr{F}_1, \ \dots, \ \mathscr{F}_n$ d'éléments de S et tout $A \in \mathscr{F}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

Ex. 5. *./limitesconti/exo-5/texte.tex*

Soient X un ensemble non vide, et $\mathscr{F}$ un filtre non sur X. On suppose que $\displaystyle\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = \varnothing$.

1. Montrer que X est infini.
2. Prouver que $\mathscr{F}$ est plus fin que le filtre des complémentaires des parties finies de X.