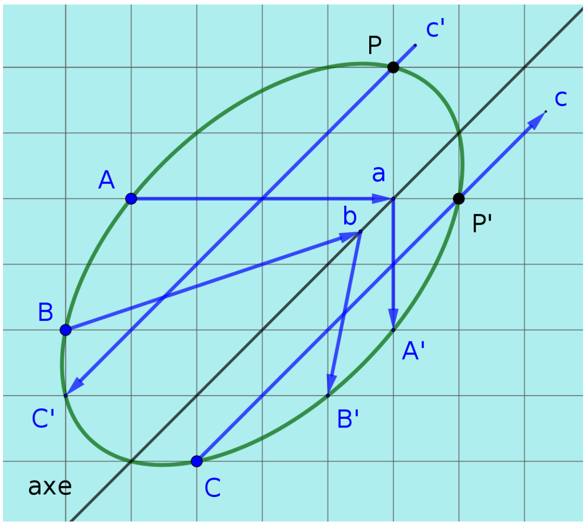
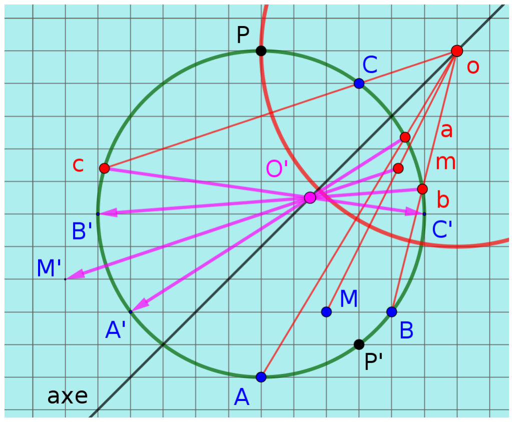
15 janvier 2022

Je crois que j'avance sur les homographies du plan !

Le 3 janvier, et même encore ce matin, je ne savais pas décomposer h qui n'était définie (la malheureuse) que par :

1) une ellipse que je lui demandais de laisser globalement stable
2) un axe
3) un point P et son image P'





Faute de mieux, j'ai osculté un cercle d'allure proche.
Et obtenu la satisfaction de décomposer h en deux inversions.

Cependant ...

Je cherchais des **homologies**, qui semblent être au plan ce que les **involutions** sont à la droite.
Donc « je tirais ma charrette sur le mauvais pavé » : les inversions, bien qu'involutives, ne sont même pas des homographies.
Une homographie, tout de même, transforme des droites en droites !

Une influence bénéfique de cette fausse piste a été de me faire creuser le fameux axe.
Je conjecture que chercher une décomposition en deux homologies, tout autant qu'une décomposition en deux inversions, a des chances d'aboutir **en prenant leurs centres sur l'axe**. (J'imagine bien pappus me montrer en deux coups de cuiller à points fixes que c'est évident, mais pour moi pas encore.)

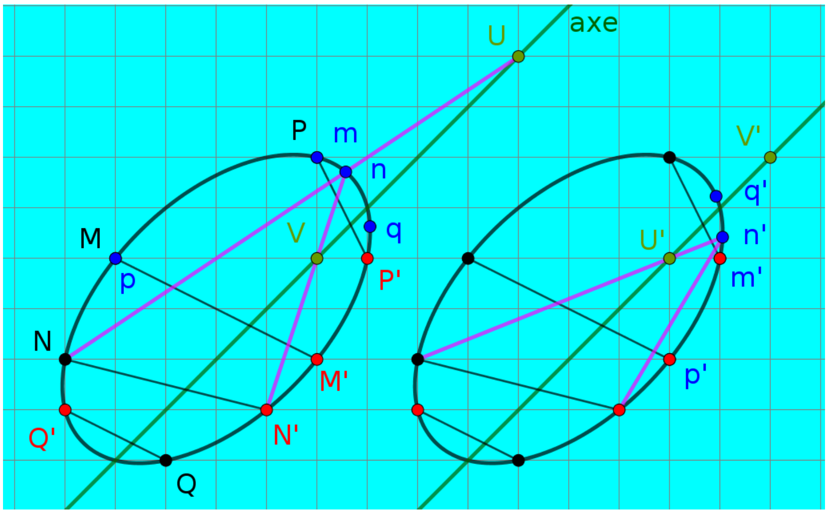
Commentaire sur les dessins de la page suivante

Une fois admise cette conjecture, il n'a pas été trop difficile de trouver des couples d'homologies solutions.
On fixe arbitrairement U sur l'axe.
On cherche ensuite V pour que les images des points témoins par la composée des homologies coïncident avec les images connues N', P', Q'.
Au fait, comment construit-on les images ?

1) À l'ancienne (= avant d'avoir compris, cette après-midi) : **encore restreint à des M sur l'ellipse**.
   m est l'autre intersection de (UM) avec l'ellipse. M' est l'autre intersection de (Vm) avec l'ellipse.
2) Avec du recul (= youpi !) **pour tout M du plan !**
   De **l'homologie** u, nous connaissons les caractéristiques
   a) son centre U
   b) son axe ? Une droite de points fixes pour la transformation décrite à l'instant ?
      Nom d'une youpipe, la **polaire de U par rapport à l'ellipse** est la seule candidate, et je puis vous dire qu'elle a donné entière satisfaction...
      Bref, connaissant P et son image p par ladite homologie, il ne reste qu'à tracer m comme intersection de (UM) avec la droite qui joint P et l'intersection de (Mp) avec la polaire.
      Rien de neuf : c'est toujours le même procédé, connaissant l'axe qui est ici la polaire, un point et son image.

   Même idée pour l'homologie de centre V et d'axe la polaire de V par rapport à l'ellipse.

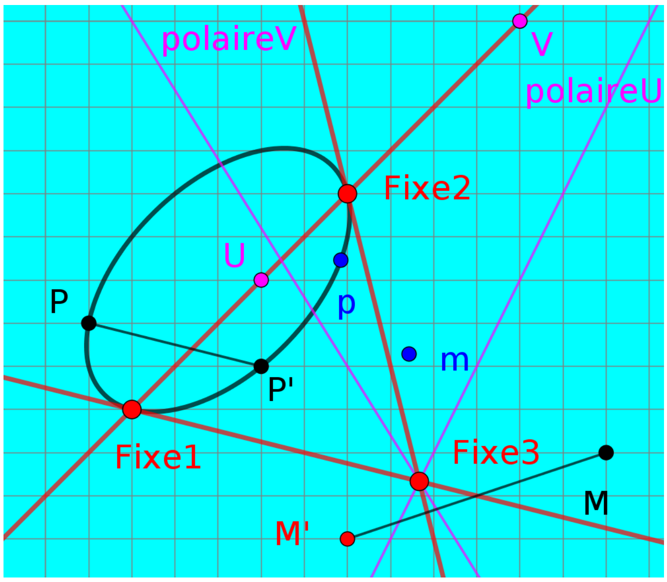
Voici deux décompositions, où l'image de N est détaillée.
Changer U et V change seulement les points intermédiaires m, n, p, q.



À la recherche du troisième point fixe

Sidler annonçait ce type d'homographie. Comme on s'en doute, chercher à l'intersection des deux polaires est une bonne idée. Cerise sur le gâteau : deux droites fort connues seront les autres droites stables attendues. Moralité : h laisse bien **stables trois droites** qui paraissent banales maintenant qu'on a pigé.

Ces droites sont l'axe et les tangentes aux intersections !



Position de V **en fonction de celle de** U dans notre exemple ?

En diagonales de carreaux, on a sur trois dessins une valeur unique du birapport [Fixe1, Fixe2, U, V] =

1) $[0,5,8,4] = \dfrac{8-0}{8-5} : \dfrac{4-0}{4-5} = \dfrac{8}{3} : \dfrac{4}{-1} = -\dfrac{2}{3}.$

2) $[0,5,4,6] = \dfrac{4-0}{4-5} : \dfrac{6-0}{6-5} = \dfrac{4}{-1} : \dfrac{6}{1} = -\dfrac{2}{3}.$

3) $[0,5,3,9] = \dfrac{3-0}{3-5} : \dfrac{9-0}{9-5} = \dfrac{3}{-2} : \dfrac{9}{4} = -\dfrac{2}{3}.$

On imagine que ça va perdurer. C'est une première réponse, qui donne sûrement V à tout coup, mais aucune idée du cas général, et du ... rapport de ce birapport avec la situation, malgré un fort soupçon qu'il n'est pas anodin !