Exercices – 99 – Révisions 2

I. X-ENS

Exercice 1 (ENS PSI 2019 – Laure Coquelet)

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note $H(M) = \{U \in O_n(\mathbb{R}), U^T M U \text{ est diagonale}\}$.

1) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.
   1.a) Montrer que $H(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow M \in S_n(\mathbb{R})$.
   1.b) Soit $U \in H(M)$ et c un vecteur colonne de U. Que dire de c par rapport à M ?
   1.c) Que vaut $H(I_n)$?
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $B = P(A)$. Montrer que $H(A) \subset H(B)$.
3) Soit $(A, B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ telles que $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $H(A) \subset H(B)$.
   3.a) Montrer que $B \in S_n(\mathbb{R})$.
   3.b) Soit a un vecteur propre de A. Montrer que a est vecteur propre de B.
   3.c) Soit E un sous-espace propre de A. Montrer qu'il existe un sous-espace propre E' de B qui contient E.
   3.d) Conclure qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Exercice 2 : Modélisation puis calcul

On considère le jeu suivant : un joueur choisit un entier $k \geq 1$ de départ puis à chaque étape tire un entier au hasard entre 1 et l'entier précédemment obtenu. On veut étudier le nombre moyen de tirages effectués lorsque l'on tombe sur la valeur 1 pour la première fois.

Pour modéliser ce jeu, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite $\left(X_{n,k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $X_{0,k}$ est constante égale à k et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \omega \in \Omega, X_{n+1,k}(\omega) \leq X_{n,k}(\omega) \quad \text{et} \quad X_{n+1,k} \xhookrightarrow[\mathbb{P}_{X_{n,k}=p}]{} \mathcal{U}([\![1,p]\!])$$

On note alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad B_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(X_{n,k} = 1\right) \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_k$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction N_k sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, N_k(\omega) = \begin{cases} \min\left(\{n \in \mathbb{N}, X_{n,k}(\omega) = 1\}\right) & \text{si } \omega \in B_k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Que représentent B_k, B et N_k dans cette modélisation ?
2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X_{n,k} \neq 1\right) \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$.
3) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k est un événement presque certain.
4) En déduire que B est un événement presque certain.

On restreint désormais l'univers à l'événement B et la tribu des observables à leur intersection avec B.
On conserve néanmoins les mêmes notations pour toutes les notions précédemment définies.

5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   5.a) Montrer que la fonction N_k est une variable aléatoire discrète à valeurs entières.
   5.b) Montrer que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(N_k \geq p)$ est convergente.
   5.c) En déduire que N_k possède une espérance et que $\mathbb{E}(N_k) \leq k$.
   5.d) Montrer que si $k \geq 2$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in [\![1, k]\!]$:
   $$\mathbb{P}_{X_{1,k}=q}(N_k \geq p) = \mathbb{P}\left(N_q \geq p - 1\right)$$
   5.e) En déduire que si $k \geq 2$:
   $$\mathbb{E}(N_k) = 1 + \frac{1}{k} \sum_{q=1}^{k} \mathbb{E}\left(N_q\right)$$

6) Conclure que $\mathbb{E}(N_1) = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$:
$$\mathbb{E}(N_k) = 1 + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

<u>Exercice 3</u> (ENS PSI 2018 – Lucas Dubois)

On pose $f: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $g: x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$ définies sur $\mathbb{R}^+$.
1) Calculer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.
2) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = -2f'(x)f(x)$.
3) En déduire une expression de g en fonction de f et la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux, décroissante et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t)dt$ soit convergente et non nulle.
   4.a) Montrer que h est à valeurs positives.
   4.b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la série $\sum_{n\geq 1} h(nt)$ converge et donner un équivalent de sa somme $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} h(nt)$ lorsque $t \to 0^+$.
5) Donner un équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ lorsque $x \to 1^-$.

<u>Exercice 4</u> (ENS PSI 2018 – Géraud Faye)

Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.
Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique, et telle que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], g(x) = |x|$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n: x \mapsto \ell^{-n} g(\ell^n x)$ et $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.
1) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(y) - g(x) \geq -|y-x|$.
2) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\ell^m a \in \mathbb{Z}$.
   Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| = \ell^{-2m-1}$. Montrer que $f(a+h) - f(a) \geq |h|$.
4) Montrer qu'il n'existe aucun intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ sur lequel f est monotone.
5) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$. Donner une expression simple de $\int_u^{u+k} f(t)dt$.

<u>Exercice 5</u> (ENS PSI 2018 – Lucien Gonnet)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$.
1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[A]$.
2) Montrer que si $M \in \mathcal{C}(A)$ et M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{C}(A)$.
3) Soit D une matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts. Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(D)$.
4) On se place dans le cas $n = 2$.
   4.a) Déterminer les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\dim\big(\mathcal{C}(A)\big) = 4$.
   4.b) Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \dim\big(\mathcal{C}(A)\big) \geq 2$.
   4.c) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $\dim\big(\mathcal{C}(A)\big) \geq 3$. En utilisant les plans $F = \mathrm{vect}\big(E_{1,1}, E_{1,2}\big)$ et $G = \mathrm{vect}\big(E_{2,1}, E_{2,2}\big)$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
   4.d) Déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$ pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$.
5) Généraliser le résultat de la question 3 à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux ne sont pas forcément distincts.

<u>Exercice 6</u>

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists!\, x_k \in \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x_k) = x_k$.
2) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{x_k^2}$ est convergente. On souhaite désormais calculer sa somme.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence de deux polynômes réels P_n et Q_n tels que :
$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, P_n(\tan(t)) + iQ_n(\tan(t)) = (1 + i\tan(t))^{2n}$$

Préciser les degrés et la parité de P_n et Q_n.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_n = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4n}, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

   4.a) Montrer que l'équation $(E_n)\colon \tan(2ny) = 2n\tan(y)$ d'inconnue $y \in A_n$ possède exactement $n-1$ solutions, notées $y_1(n) < \cdots < y_{n-1}(n)$.

   4.b) Montrer que $\forall y \in A_n, \left(\frac{P_n+iQ_n}{P_n-iQ_n}\right)(\tan(y)) = \frac{1+i\tan(2ny)}{1-i\tan(2ny)}$.

   4.c) En déduire un polynôme réel U_n tel que :

$$\forall y \in A_n, \tan(2ny) = 2n\tan(y) \Leftrightarrow U_n\left(\frac{1}{\tan^2(y)}\right) = 0$$

   4.d) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\tan^2\big(y_k(n)\big)} = \frac{(n-1)(2n-3)}{5}$$

5) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2ny_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_k$.

6) Conclure que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x_k^2} = \frac{1}{10}$$

Exercice 7 (ENS PSI 2018 – Lucie Thiollière et Vianey Darsel)

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.
Dans cet exercice, on appelle **état du système** un vecteur colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
On appelle **contrôle du système** un vecteur colonne de $M_{m,1}(\mathbb{R})$.
On appelle **système dynamique** le système infini d'équations (S) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad X_{k+1} = AX_k + BU_k$$

où les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des états du système et les $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des contrôles.
On dit que le système (S) est **contrôlable au temps N** $\in \mathbb{N}$ si pour tout couple d'états (initial et final) $\left(\widetilde{X_0}, \widetilde{X_N}\right) \in \left(M_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2$, il existe une suite finie de contrôles $(U_0, \dots, U_{N-1}) \in \left(M_{m,1}(\mathbb{R})\right)^N$ tels que la suite $(X_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ d'états du système définie par l'état initial $X_0 = \widetilde{X_0}$ et le système dynamique (S) atteigne l'état final $X_N = \widetilde{X_N}$.
On dit enfin que le système est **contrôlable** s'il est contrôlable à tout temps $N \geq n$.
On notera C la **matrice** dite **de contrôlabilité** $C = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) \in M_{n,mn}(\mathbb{R})$.

1) Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'états du système et une suite de contrôles $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant le système dynamique (S). Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer X_k en fonction de l'état initial X_0, des matrices A et B, et des contrôles $(U_0, \dots, U_{k-1})$.

2) On suppose que le rang de la matrice de contrôlabilité C est strictement plus petit que n.

   2.a) Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $\forall k \in \mathbb{N}, X^T A^k B = 0_{1,m}$.
   On pourra considérer l'application $\phi\colon X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto X^T C \in M_{1,mn}(\mathbb{R})$.

   2.b) En déduire que dans ce cas le système (S) n'est pas contrôlable.

3) Soit N un entier supérieur ou égal à n.
On suppose à présent que le système (S) n'est pas contrôlable au temps N.

   3.a) On considère l'application F de $\left(M_{m,1}(\mathbb{R})\right)^N$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$F\colon (U_0, \dots, U_{N-1}) \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} B U_k$$

   Montrer que F est linéaire et non surjective.

   3.b) En déduire qu'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que :

$$\forall (U_0, \dots, U_{N-1}) \in \left(M_{m,1}(\mathbb{R})\right)^N, X^T \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-1-k} B U_k = 0$$

3.c) En déduire que $\mathrm{rg}(C) < n$.

4) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que le système (S) soit contrôlable.

Exercice 8 (X MP 2020)

Soit $f : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to -1^+]{} \frac{1}{2}$.

Exercice 9 (ENS PSI 2019 – Jean-Baptiste Bérerd)

Soit A une application continue et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $F = C^1\left(\mathbb{R}, M_{n,1}(\mathbb{R})\right)$.

On considère l'équation différentielle $(E) : \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X \in F$ et on note S l'ensemble de ses solutions.

1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application ψ_t de S dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à une solution X associe sa valeur en t est un isomorphisme.
2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application φ_t de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à X_0 associe la valeur en t de la solution $X \in S$ telle que $X(0) = X_0$ est un automorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $R(t)$ la matrice de φ_t dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit X une solution de (E). Exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.
4) Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto R(t)$ est de classe C^1, que $\forall t \in \mathbb{R}, R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(t)$ est inversible pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$. Que vaut $R(0)$?
5) Soit $\omega : t \in \mathbb{R} \mapsto \det\left(R(t)\right)$. Montrer que ω est de classe C^1 et que $\forall t \in \mathbb{R}, \omega'(t) = \mathrm{tr}\left(A(t)\right)\omega(t)$.
6) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, R(t+1) = R(t)R(1)$.
7) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\left(R(1)\right)$ si et seulement si (E) possède une solution 1-périodique non nulle.
8) On suppose que $R(1)$ est diagonalisable et précisément qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que si on note $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $R(1) = PDP^{-1}$.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^{-t} \end{pmatrix}$ et $Q(t) = R(t)P\Lambda(t)P^{-1}$.

   8.a) Montrer que $t \mapsto Q(t)$ est 1-périodique et C^1 et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t)$ est inversible.

   8.b) On note $\Delta = \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix}$ et $B = P\Delta P^{-1}$. Soit $X \in F$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Z(t) = Q(t)^{-1}X(t)$. Montrer que $t \mapsto Z(t)$ est de classe C^1 puis montrer que X est solution de (E) si et seulement si $\forall t \in E, Z'(t) = BZ(t)$.

Exercice 10 (X PC 2020)

Soit P un polynôme réel non nul à coefficients positifs ou nuls et $f : x \mapsto \exp\left(P(x)\right)$.

1) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0, de rayon de convergence $+\infty$.
2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq 0$.

Pour tout $x > 0$, on note X_x une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_x = n) = \frac{b_n x^n}{f(x)}$$

3) Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbb{E}(X_x)$ et $\mathbb{V}(X_x)$ à l'aide de P.
4) Soit $d \in \mathbb{R}^+$ tel que $2d > \deg(P)$. Pour $x > 0$, on note $I_{x,d} = \{n \in \mathbb{N}, |n - xP'(x)| \geq x^d\}$ et $g_d(x) = \sum_{n \in I_{x,d}} b_n x^n$. Montrer que $g_d(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(f(x)\right)$.

Exercice 11 **(X PSI 2021 – Charlotte Génin, Romain Cuadrado)**

Soit $(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ tous différents. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $H_k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_k = 0\}$ et p_{H_k} la projection orthogonale sur H_k pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $\dim\left(\mathrm{vect}\left(v_i - v_j, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2\right)\right) \leq n - 1$.
2) Montrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que les vecteurs $\left(p_{H_k}(v_i)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ soient tous différents.

Exercice 12 **(X PSI 2021 – Charlotte Génin, Romain Cuadrado)**

1) Montrer que la fonction cos admet un unique point fixe.
2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction f dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 13 **(X PC 2020)**

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n le reste de la division euclidienne de n par X_n et $Y_n = \frac{R_n}{X_n}$.

Calculer $u_n = \mathbb{P}\left(Y_n \geq \frac{1}{2}\right)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 14 **(X PSI 2020 – Antoine Hauser)**

Déterminer l'ensemble $E = \left\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\right\}$.

Exercice 15 **(X PSI 2020 – Théo Communal)**

Soit $(M, N) \in \left(M_n(\mathbb{C})\right)^2$ et $Z = \begin{pmatrix} 0_n & M \\ N & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Soit $(B, C) \in \left(GL_n(\mathbb{C})\right)^2$ et $A = \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Calculer AZA^{-1}.
2) On suppose que $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \chi_Z(\lambda) = \chi_{MN}(\lambda^2)$.

Exercice 16

Montrer la convergence de la série puis montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \right)^2 - \frac{1}{n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{3\zeta(3)}{2}$$

Exercice 17 **(ENS PSI 2018 – Thibault Béranger)**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On définit la fonction $T_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)\, t^k$.

1) Soit $t \in]-1, 1[$. Justifier l'existence de $T_X(t)$ et exprimer $(1 - t)T_X(t)$ à l'aide de $G_X(t)$.
2) Montrer que X possède une espérance si et seulement si T_X est définie en 1. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $T_X(1)$ dans ce cas.
3) Montrer que X possède une variance si et seulement si T_X est dérivable en 1. Exprimer $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $T_X'(1)$ et $T_X(1)$ dans ce cas.
4) On suppose désormais que X est presque sûrement bornée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $Y_m = \binom{X}{m}$, $u_m = \mathbb{E}(Y_m)$ et $H_X : t \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} u_m t^m$.
   4.a) Exprimer H_X en fonction de G_X.
   4.b) En déduire que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X \geq j) = \sum_{m=j}^{+\infty} (-1)^{m-j} \binom{m-1}{j-1} u_m$$

Exercice 18

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+1} = \frac{1}{2m}(1 - X^2)P_n' + \frac{1}{2}(X + 1)P_n$$

1) Montrer que la suite $(\deg(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2) Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

<u>Exercice 19</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit Φ l'espace vectoriel des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \varphi(x)\psi(x)$. Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \{0,1\}^n$, on note δ_u l'application qui à $x \in \{0,1\}^n$ associe 1 si $x = u$ et 0 sinon et χ_u celle qui à $x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ associe $2^{-n/2}(-1)^{u_1x_1+\dots+u_nx_n}$.

1) Montrer que $(\delta_u)_{u\in\{0,1\}^n}$ est une base orthonormée de Φ. Préciser les coordonnées de $\varphi \in \Phi$ dans cette base.
2) Montrer que $(\chi_u)_{u\in\{0,1\}^n}$ est une base orthonormée de Φ.
3) Pour $\varphi \in \Phi$, on pose $\hat{\varphi}: u \in \{0,1\}^n \mapsto \langle\varphi,\chi_u\rangle$. Calculer $\widehat{\delta_u}$ et $\widehat{\chi_u}$ pour $u \in \{0,1\}^n$.
4) Montrer que l'application $S: \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est une isométrie vectorielle de Φ.
5) Montrer que pour tout $(\varphi,\psi) \in \Phi^2$, $\langle\hat{\varphi},\psi\rangle = \langle\varphi,\hat{\psi}\rangle$. Que peut-on en déduire pour S ?

<u>Exercice 20</u> (ENS PSI 2021 – Aurélien Droz-Vincent)

Soit $\rho > 0$ et $a \in C^0([0,1],\mathbb{R}^+)$. On pose $f_0 = \tilde{0}$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}: x \in [0,1] \mapsto \frac{\rho}{\rho + a(x) - \int_0^1 a(y)f_n(y)dy}$$

On note $u_n = \int_0^1 a(y)f_n(y)dy$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\rho[$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2) On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], a(x) \geq C$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et préciser sa limite.
   <u>Indication</u> : On distinguera les cas $\rho\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} \leq 1$ et $\rho\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} > 1$.
3) On considère désormais le cas $a: x \mapsto \sqrt{x}$.
   3.a) Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.
   3.b) Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles la suite $(\|f_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

<u>Exercice 21</u>

Soit u la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et R le rayon de convergence de la série entière définissant f.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\sqrt{2}\right)^{1-n}$. Que peut-on en déduire pour R ?
2) Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$, $\int_0^x \frac{2f'(t)}{1+f(t)^2}dt = x$.
3) En déduire f et une majoration de R.

<u>Exercice 22</u>

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit $\zeta: s \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. Soit $s > 1$.

1) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que la famille $(\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On considère désormais une variable aléatoire X_s à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant cette loi.

2) Pour quels s, X_s est-elle d'espérance finie ?
3) Montrer que les évènements $(X_s \in p\mathbb{N}^*)_{p\in\mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants.
4) On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'énumération croissante des éléments de $\mathcal{P}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}}$$

5) Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{p_n}$.

Exercice 23 (ENS PSI 2019 – Vianney Nonat)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ mutuellement indépendantes et de même loi, définies sur Ω. Soit N une variable aléatoire également définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Enfin, soit $S: \omega \in \Omega \mapsto \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1) Dans cette question, les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de S.
2) On suppose que X_1 est presque sûrement bornée. Exprimer la fonction génératrice de S en fonction de celles de N et de X_1.
   On admet que la formule trouvée est valable même si X_1 n'est pas presque sûrement bornée.
3) On suppose que X_1 et N possèdent une espérance. Montrer que S en possède une et exprimer $\mathbb{E}(S)$ en fonction de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(X_1)$.
4) On suppose que X_1 et N possèdent une variance. Montrer que S en possède également une et que :
$$\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(N^2)\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(N)^2\mathbb{E}(X_1)^2$$

Exercice 24 : Quelques matrice étudiées par Donald E. Knuth

On pose $A_0 = (0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la taille de la matrice A_n et $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{a_n} \\ I_{a_n} & -A_n \end{pmatrix}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n. Calculer A_n^2. Déterminer les valeurs propres de A_n et leurs multiplicités.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \left\{i_1, i_2, \dots, i_{\frac{a_n}{2}-1}\right\}$ un ensemble de $\frac{a_n}{2} - 1$ entiers tous différents choisis entre 1 et a_n. Soit B_n la matrice obtenue en supprimant dans A_n les lignes et colonnes d'indices $i_1, i_2, \dots, i_{\frac{a_n}{2}-1}$.
   Montrer que $\sqrt{n}$ est valeur propre de B_n.

Exercice 25

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension 5.
Que dire de f ?

Exercice 26

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et $t = \mathrm{tr}(A^{-1}B)$.

1) Montrer que si $t \neq -1$, $A + B$ est inversible, d'inverse $A^{-1} - \frac{1}{1+t}A^{-1}BA^{-1}$.
2) Montrer que si $t = -1$, $A + B$ n'est pas inversible.

Exercice 27 (ENS PSI 2019 – Laurine Tornare)

Soit f la fonction périodique de période 1 telle que $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, f(x) = x$ et $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, f(x) = 1 - x$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et préciser ses bornes.
2) Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $2^n\left(f(m2^{-n}) - f\big((m+1)2^{-n}\big)\right) \in \{-1,1\}$.
3) Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\geq 0} 2^{-n}f(2^n x)$ converge uniformément vers une fonction F continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
4) Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u = m2^{-n}$ et $v = (m+1)2^{-n}$.
   4.a) Montrer que $F(m2^{-n}) = \sum_{r=0}^{n-1} 2^{-r}f(m2^{r-n})$.
   4.b) Montrer qu'il existe $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{-1,1\}^n$ tels que $\frac{F(u)-F(v)}{u-v} = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{n-1}$ et en déduire que ce taux d'accroissement est de même parité que n.
5) Montrer que F n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 28

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)\big(f(x) - f'(x)\big) = x^2$.

Exercice 29 (X PSI 2021 – Nicolas Barbarin)

Déterminer l'ensemble image de l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, xy)$.

Exercice 30

Déterminer les couples de polynômes $(P,Q)\in\mathbb{C}[X]^2$ tels que pour tout $y\in\mathbb{C}$, si y n'est pas racine du polynôme Q alors l'application $f_y : x\in\mathbb{C}\mapsto P(x)-\frac{P(y)}{Q(y)}Q(x)$ ne s'annule qu'en y.

Exercice 31

Soit S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme. Soit X la variable aléatoire définie sur S_n qui à chaque permutation associe son nombre de points fixes. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

II. Concours commun Mines-Ponts

Exercice 32

Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\ln(n+k)=n\ln(n)+an+b+\underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Exercice 33

Existence et calcul de l'intégrale :

$$I=\int_0^1\frac{(-1)^{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}}{x}dx$$

Exercice 34

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x\mapsto x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

1) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq1}u_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

On pose alors :

$$f : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto-\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$$

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrer que f est l'unique fonction vérifiant les 3 propriétés :
    3.a.i) $f(1)=0$
    3.a.ii) $\forall x>0, f(x+1)-f(x)=\ln(x)$
    3.a.iii) f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
4) On rappelle que Γ est la fonction $x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$. Montrer que $f=\ln\circ\Gamma$.

Exercice 35

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Soit $m\in[\![1,n]\!]$. Soit Z la variable aléatoire définie sur Ω par $\forall\omega\in\Omega, Z(\omega)=X(\omega)$ si $Y(\omega)\leq m$ et $Z(\omega)=Y(\omega)$ sinon.

1) Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.
2) Déterminer les entiers m qui maximisent l'espérance de Z.

Exercice 36

Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}3&5\\0&-12\end{pmatrix}$ puis résoudre l'équation $M^3+2M=A$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 37

1) Soit $n\geq1$. Montrer que les intégrales $\int_0^\pi\frac{dx}{1+\cos^2(nx)}$ et $\int_0^\pi\frac{dx}{1+\cos^2(x)}$ sont égales puis déterminer leur valeur.
2) Soit $f\in C^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite $\left(\int_0^\pi\frac{f(x)dx}{1+\cos^2(nx)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 38

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A possède trois valeurs propres distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.
2) Déterminer le rayon de convergence et exprimer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^n)\, x^n$ sous la forme d'une fraction rationnelle à coefficients entiers.

Exercice 39

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g : x \mapsto \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1) Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.
2) Montrer que f et g sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \frac{1}{x}$.
3) En déduire que $f = g$ puis déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 40

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
2) Encadrer son rayon de convergence entre deux réels strictement positifs.

Exercice 41

Soit E un espace euclidien, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u : x \in E \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

1) Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E.
2) Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3) En déduire qu'il existe un automorphisme v de E, autoadjoint, tel que $u^{-1} = v^2$. Est-il unique ?
4) On considère un tel automorphisme v. Montrer que la famille $\big(v(e_1), \dots, v(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 42 (Mines PSI 2019 – Sacha Lipatoff)

On pose $\forall x > 0, f(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$. Montrer que $\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}$.

Exercice 43

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $f : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, \dots, a_n)$ pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 44

1) Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$.
   1.a) Montrer que M est soit diagonalisable, soit semblable à une matrice $T(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.
   1.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$. Montrer que la suite $\big(E_n(M)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $E(M)$ sa limite.
2) Montrer que pour tout $M \in M_2(\mathbb{C})$, $E(M) \in GL_2(\mathbb{C})$.
3) Montrer que l'application $M \mapsto E(M)$ est surjective de $M_2(\mathbb{C})$ dans $GL_2(\mathbb{C})$ mais pas injective.

Exercice 45

Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, [A]_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ i \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

1) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.
2) En déduire que la matrice A est diagonalisable et préciser des encadrements de ses valeurs propres.
3) Déterminer la somme des valeurs propres de A.
   Soit μ_n la plus grande d'entre elles. Déterminer un réel C tel que $\mu_n \underset{n \to +\infty}{\sim} C n^2$.

Exercice 46

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X+k)$.

Exercice 47

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{4}(e^x + 3e^{-x} + 2xe^x)$.

1) Justifier que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On note alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2) Montrer que pour tout $n \neq 1$, $a_n \neq 0$ et $\frac{1}{a_n} \in \mathbb{N}$.

Exercice 48

Pour tout réel $x > 1$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{sh}(t)}{t} dt$.

1) Montrer que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2) Déterminer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.
3) Calculer $F(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 49

Soit $F : x \in]1, +\infty[\mapsto \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{e^t}{t} dt$.

1) Montrer que F est injective.
2) Déterminer la limite de F en 1^+.

Exercice 50

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3 + A + I_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$.

Exercice 51

Soit a et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On considère n fournisseurs et an clients. Chaque client choisit un fournisseur au hasard uniformément et indépendamment des autres clients. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur numéroté i. Enfin, on note Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, préciser la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
   2.a) Calculer $\mathrm{cov}(X_1 + \dots + X_n, X_i)$.
   2.b) En déduire $\mathbb{E}(X_j X_i)$, $\mathrm{cov}(X_j, X_i)$ et $\rho(X_j, X_i)$ pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$.
3) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 52

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$.

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Calculer a_0 et a_1.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$.
3) Montrer que la suite $\big((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1}a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4) En déduire un équivalent de a_n lorsque $n \to +\infty$.
5) Les séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ sont-elles convergentes ? Calculer leur somme, le cas échéant.

Exercice 53 (Mines PSI 2018 – Lucas Dubois)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ est bien défini et est un produit scalaire sur E.
2) On note $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ et $(P_0, \dots, P_n)$ une base orthonormée obtenue à partir de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ par orthonormalisation de Schmidt.
   2.a) Calculer $P_k(0)^2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
   2.b) Donner une base de $F^\perp$ en fonction de $(P_0, \dots, P_n)$ et en déduire $d(1, F)$.

Exercice 54 (Mines PSI 2018 – Lucas Dubois)

On note $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

1) Montrer que f est définie sur $I = \mathbb{R}^+$ et dérivable sur I.
2) Donner un équivalent de f en 0^+.
3) Écrire f' sous forme intégrale et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 55 (Mines PSI 2018 – Arnaud Repain)

Déterminer l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{3}{2}\int_0^x f(t)^{\frac{1}{3}}dt$$

Exercice 56 (Mines PSI 2018 – Bénédicte Chabac)

Déterminer un polynôme réel P de degré minimal tel que les restes des divisions euclidiennes de P par X^2+X+1 et X^2-X+1 soient respectivement $X-\frac{1}{2}$ et $-X+2$.

Exercice 57

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les éléments propres de A.
2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} kA^k$ lorsque $n \to +\infty$ et l'exprimer à l'aide de A.

Exercice 58

Soit Δ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans lui-même qui à P associe $P(X+1)-P(X)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k le polynôme $\binom{X}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$.

1) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ et déterminer son image par Δ.
2) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} e^{-z}\frac{P(n)}{n!}z^n$ converge absolument.
   On note $u(P)(z)$ sa somme.
3) Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application $z \mapsto u(P)(z)$ est polynomiale.
   On note $u(P)$ le polynôme qui lui est associé.
4) Montrer que l'application $u: P \mapsto u(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
5) Déterminer les éléments propres de u.
6) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$u(P) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Delta^n(P)(0)}{n!}X^n$$

Exercice 59 (Mines PSI 2018 – Robin Courson)

1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $M = \lambda I_n + B$. Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement si $\exists \mu \in \mathbb{C}, P(M) = \mu I_n$.
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $P \in \mathbb{C}[X]$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente et commutant avec A et $M = A + B$. Montrer que $P(M)$ est diagonalisable si et seulement si $\exists Q \in \mathbb{C}[X], P(M) = Q(A)$.

III. Centrale sans Python

Exercice 60 Intégrale de Poisson (Centrale PSI 2018 – Vianey Darsel)

Soit $f: x \mapsto \int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est paire.
3) Montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)=(X^n-1)^2$$

4) En déduire l'expression de $f(x)$ lorsque $|x|>1$ et lorsque $|x|<1$ à l'aide du théorème des sommes de Riemann.
5) Calculer $f(1)$.

<u>Exercice 61</u> (Centrale PSI 2019 – Auxane Deconinck)

Soit $f\colon x\mapsto\int_x^{2x}\ln\left(\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)dt$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f. Étudier sa parité.
2) Étudier les variations de f et préciser les limites de f aux bornes de D.

<u>Exercice 62</u>

On cherche à déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ solutions de $(*)\colon P(X^2)=P(X)P(X-1)$.

1) Déterminer les solutions constantes de $(*)$.
2) Montrer que si P est solution de $(*)$ et si ω est une racine complexe de P alors ω^2 et $(\omega+1)^2$ sont également racines de P.
3) En déduire que si P est une solution non nulle de $(*)$ et si ω est racine de P alors $|\omega|\in\{0,1\}$.
4) Déterminer l'ensemble des polynômes solutions de $(*)$.

<u>Exercice 63</u> (Centrale PSI 2019 – Lucile Danion)

Soit $n\in\mathbb{N}$, $(A,B)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que $A(a)\neq 0$.
Soit $\mathcal{E}=\{P\in\mathbb{R}_n[X], P+P(a)A=B\}$ et $f\colon P\mapsto P(a)A$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est son rang ?
2) Montrer que f est diagonalisable.
3) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ en discutant suivant les valeurs de $A(a)$ et $B(a)$.

<u>Exercice 64</u> (Centrale PSI 2019 – Étienne Mangot)

Soit $f\colon x\mapsto\frac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$.

1) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence.
2) Montrer que la fonction $x\mapsto(1-x^{15})f(x)-\frac{1}{1-x}$ est polynomiale et préciser son degré.
3) On note $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ le développement en série entière de f.
   3.a) Déterminer une relation entre c_{n+15} et c_n pour $n\in\mathbb{N}$.
   3.b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, c_n=\mathrm{card}(\{(u,v)\in\mathbb{N}^2, 3u+5v=n\})$.

<u>Exercice 65</u>

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de la matrice A.

1) Que peut-on dire des valeurs propres de A ?
2) Montrer que A possède un polynôme annulateur de degré p.
3) Montrer que les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A et en déduire que la famille $(I_n,A,\dots,A^{p-1})$ est libre.
4) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_k\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k=P_k(A)$ et en déduire qu'il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L=P(A)$.

<u>Exercice 66</u> (Centrale PSI 2019 – Lucile Danion)

Soit V un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(V)=\{M\in M_n(\mathbb{R}),\forall X\in V, MX=0\}$.
Déterminer l'orthogonal de $A(V)$ pour le produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$.

<u>Exercice 67</u> Nombres de Motzkin

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on place n points distincts $A_0,\dots,A_{n-1}$ sur un cercle, numérotés dans le sens trigonométrique, et on définit M_n comme le nombre d'ensembles de segments **disjoints** ayant pour extrémités ces points. Par exemple, pour $n = 4$, $\{[A_0A_1], [A_2A_3]\}$ est un tel ensemble mais $\{[A_0A_2], [A_1A_3]\}$ n'en est pas un. On vérifie que $M_3 = 4$ avec les ensembles de segments : $\emptyset$, $\{[A_0A_1]\}$, $\{[A_0A_2]\}$, $\{[A_1A_2]\}$. Par convention, on pose $M_0 = 1$.

1) Déterminer M_1, M_2, M_4 et M_5.
2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-i-1}$.
3) Écrire un programme Python **`motzkin(n)`** renvoyant la liste $[M_0, \dots, M_n]$.

On note $M: z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} M_n z^n$.

4) Montrer que le rayon R de cette série entière est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.
5) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :
$$M(z) = 1 + zM(z) + z^2M(z)^2$$
6) En déduire une expression de $M(x)$ pour $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ et que $R = \frac{1}{3}$.

<u>Exercice 68</u> (Centrale PSI 2018 – Augustin Pinet et Bénédicte Chabac)

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1) Déterminer le projeté orthogonal p_{X^3} de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que le polynôme $P = X^3 - p_{X^3}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et préciser ses racines $x_1 < x_2 < x_3$.
3) Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, on note $J_{\alpha,y}(Q) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k Q(y_k)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $y \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall Q \in \mathbb{R}_3[X], J_{\lambda,y}(Q) = \int_0^1 Q(t)dt$.
4) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$:
$$\int_0^1 Q(t)dt = \frac{1}{18}\big(5Q(x_1) + 8Q(x_2) + 5Q(x_3)\big)$$
5) Vérifier qu'en fait la formule précédente est valable pour tout $Q \in \mathbb{R}_5[X]$.

<u>Exercice 69</u> Polynômes d'Euler

1) Montrer que si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Q(X) + Q(X+1) = 0$ alors $Q = 0$.
2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$$
3) Trouver une relation entre P_n' et P_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Exprimer $P_n(X+1)$ en fonction de $P_0, \dots, P_n$ puis P_n à l'aide de $P_0, \dots, P_{n-1}$
5) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme Q associe $Q(X) + Q(X+1)$ est-il diagonalisable ?

<u>Exercice 70</u>

Soit E un espace euclidien. On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, c'est-à-dire dont les valeurs propres sont positives.

1) Soit $u \in S^+(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\langle x, u(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(u)$.
2) Soit $(a, b) \in \big(S^+(E)\big)^2$. On note $f = a \circ b$.
   - 2.a) Montrer qu'il existe $h \in S^+(E)$ tel que $h^2 = b$. On note $g = h \circ a \circ h$.
   - 2.b) Montrer que g est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.
   - 2.c) On suppose que b est bijectif. En remarquant que $f = (a \circ h) \circ h$, montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Que peut-on en conclure sur f ?
   - 2.d) Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose plus que b est bijectif ?

<u>Exercice 71</u> (Centrale PSI 2021 – Yann Montoya)

Soit f l'application qui à tout réel x non nul associe $\frac{\sin(x^2)}{x^2}$ et à 0 associe 1.

1) Étudier la convergence de l'intégrale $S(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\left\lfloor \frac{t}{x} \right\rfloor x\right) dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$S(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

3) Soit $G: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$.
   3.a) Montrer que G est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.
   3.b) Soit $x > 0$. Exprimer $G(x)$ en fonction de $S(\sqrt{x})$.
   3.c) En déduire que G n'est pas dérivable en 0.

Exercice 72

1) Montrer que l'application $\varphi: t \mapsto (t, \sin(t))$ est une isométrie non linéaire de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\dots|)$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^2, \|\dots\|_\infty)$.
2) Soit H un espace préhilbertien réel et φ une application de $\mathbb{R}$ dans H vérifiant $\varphi(0) = 0$ et qui soit une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\dots|)$ dans l'espace vectoriel normé $(H, \|\dots\|)$ où $\|\dots\|$ est la norme euclidienne sur H.
   2.a) Soit $(x, y) \in (H \setminus \{0\})^2$ tels que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.
   Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $y = \lambda x$.
   2.b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t) = t\varphi(1)$.
   2.c) Conclure que φ est linéaire.

Exercice 73

Une puce initialement placée à l'origine d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ fait des sauts aléatoires indépendants les uns des autres de longueur 1 dans l'une des 4 directions $\vec{\imath}, -\vec{\imath}, \vec{\jmath}, -\vec{\jmath}$.
On note (X_n, Y_n) ses coordonnées au bout de n sauts.
Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$. On pourra introduire $T_n = X_n - X_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Exercice 74

Soit $f: x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 + \sin^2(t))\, dt$.
Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et trouver une expression plus simple de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 75

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète.
1) Soit I une partie de $\mathbb{R}$, b un réel strictement positif et g une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $g(X)$ possède une espérance et $\forall x \in I, g(x) \geq b$. Montrer que $\mathbb{P}(X \in I) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{b}$.
2) On suppose que X possède un moment d'ordre 2, qu'elle est centrée et on note σ son écart-type.
   Montrer que $\forall t > 0, \mathbb{P}(X > t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$.
3) On suppose que X est positive et possède une espérance. Montrer que l'application $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$.

Exercice 76 (Centrale PSI 2018 – Arnaud Repain)

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et μ un réel strictement positif.
On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est μ-presque orthonormée si :
1) d'une part, $\forall i \in [\![1, n]\!], \|x_i\| = 1$,
2) d'autre part, pour toute famille $(a_1, \dots, a_n)$ de scalaires :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est presque orthonormée s'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel qu'elle soit μ-presque orthonormée.
1) Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée si et seulement si elle est 1-presque orthonormée.

2) Soit $\mu > 0$. Montrer que si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est μ-presque orthonormée, elle est libre.
3) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs normés de $\mathbb{R}^n$. Soit Q la matrice de cette famille dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et soit $G = Q^T Q$.
   3.a) Montrer qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice Δ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $G = P^T \Delta P$.
   3.b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ et $B = PA$. Encadrer $\|w\|^2$ en fonction de $\|B\|^2$ et des valeurs propres de G.
   3.c) En déduire que toute famille libre de vecteurs normés de $\mathbb{R}^n$ est presque orthonormée.

IV. CCINP-E3A

Exercice 77 (CCINP PSI 2018 – Adrien Grataloup)

1) Montrer que $f: x \mapsto x + \ln(1+x)$ réalise une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
2) Montrer que sa réciproque g est de classe C^∞ et préciser $g(0)$ et $g'(0)$.
3) Montrer que g possède un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer.

Exercice 78 (CCINP PSI 2018 – Adrien Grataloup)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [A]_{i,j} = i/j$.
1) Calculer A^2.
2) Montrer que A n'est pas inversible.
3) A est-elle diagonalisable ?
4) Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 79

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E.
1) On suppose que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et $u^2 = \tilde{0}$.
   1.a) Montrer que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$.
   1.b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2) On suppose que $\mathrm{rg}(u) = 3$ et $u^4 = \tilde{0}$.
   2.a) Montrer que $\ker(u^2) = \mathrm{Im}(u^2)$.
   2.b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 80

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = \tilde{0}$ et A sa matrice dans la base canonique.
1) Montrer que A n'est pas inversible.
2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + Id)$.
3) Montrer que $\ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
4) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 81

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
1) Montrer que si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont racines de P.
2) Montrer que la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
3) Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.
4) Montrer que : $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \exists!\, X \in M_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

Exercice 82

1) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge.
2) On pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n\sqrt{t-1}}$.
   2.a) Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$, cette intégrale I_n est-elle convergente ? On note D leur ensemble.
   2.b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in D}$ est positive et décroissante.
3) Soit $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$. Déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité de f.
4) Pour $u \in]-1,1[$, montrer que $(1-u)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} u^n$.
5) Pour $t > 1$ et x suffisamment proche de 0, montrer que $\frac{1}{\sqrt{t(t-x)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{t^{n+1}}$.
6) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 83

1) Montrer que, pour x dans un ensemble D à préciser : $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
2) Montrer que :

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$$