L'aire de la sphère est égale à l'aire latérale du cylindre circonscrit.

Pour démontrer ce théorème, divisons ces deux aires en éléments infiniment petits par des plans parallèles au plan de l'équateur. Deux tels plans infiniment voisins découpent sur le cylindre une surface MNM'N' et sur la sphère une surface PQP'Q'. Nous allons voir que ces deux surfaces infiniment petites sont égales. La surface découpée sur le cylindre est la surface latérale d'un cylindre dont le rayon de base est R, rayon de la sphère et la hauteur $MM' = \varepsilon$: cette surface est $2\pi R\varepsilon$.

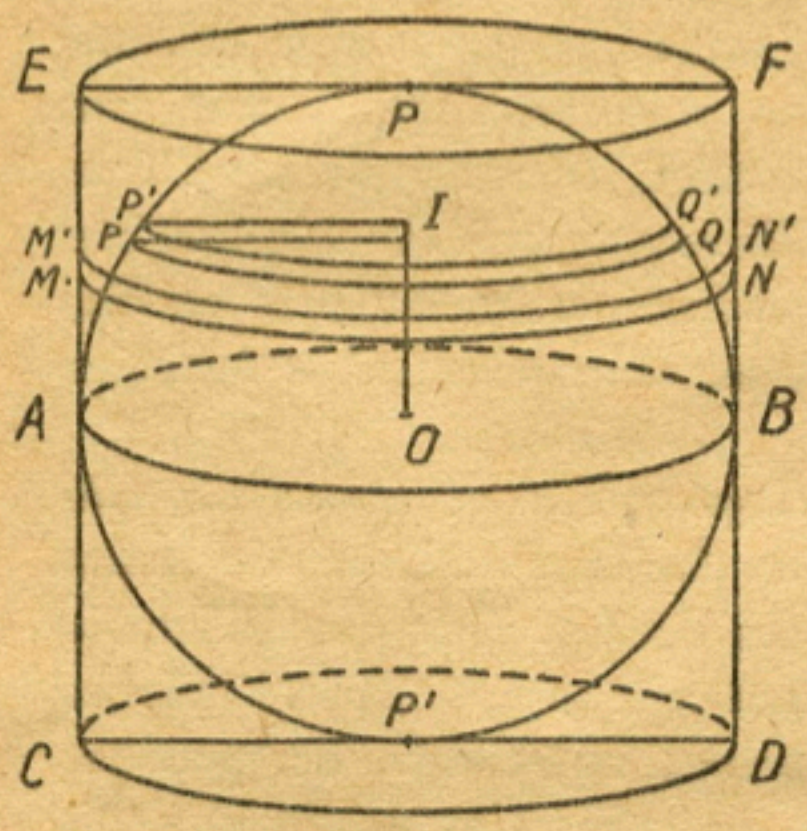

Fig. 7.

La surface PQP'Q' découpée sur la sphère est infiniment voisine de la surface latérale d'un tronc de cône dont le rayon est le rayon R' du cercle PQ et l'arête latérale la longueur $PP' = \varepsilon'$. Cette surface est $2\pi R'\varepsilon'$ à un infiniment petit près d'ordre supérieur. Mais des triangles rectangles semblables donnent :

$$\frac{\varepsilon}{IP} = \frac{\varepsilon'}{OP};$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\varepsilon}{R'} = \frac{\varepsilon'}{R};$$

ou enfin :

$$\varepsilon R = \varepsilon' R'.$$

Ces deux surfaces sont donc égales, tout au moins à des infiniment petits près d'ordre supérieur. On en conclut que les surfaces comprises entre deux plans parallèles quel-