Alors, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^{\mu}}$, *avec* $\mu = \frac{\operatorname{Log}(QE_1)}{\operatorname{Log} E_0}$ *et*
$C = \frac{\ell_1}{k_0}(QE_1)^{-1-\frac{\operatorname{Log}(\ell_0/\ell_1)}{\operatorname{Log} E_0}}$.

1) Soit n le plus petit entier vérifiant $|q_n\alpha - p_n| < \ell_1/q$. Prouver que n existe, que $n \geqslant 1$, que $q_n \neq 0$, et que $n \leqslant \frac{\operatorname{Log}(\ell_1 q/\ell_0)}{\operatorname{Log} E_0} + 1$.

2) Démontrer que, si $q_n p - p_n q = 0$, alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\ell_1 E_1^{-n}}{|q_n|}$. En déduire que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant Cq^{-\mu}$, où C et μ sont donnés ci-dessus.

3) Démontrer que ce résultat reste valable si $q_n p - p_n q \neq 0$.

9.18 Mesures d'irrationalité de π^2 et π

Soit $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; on sait (exercice 7.17) que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

1) Pour $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s dx dy}{1-xy}$.

Prouver que $I_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$ et que $I_{r,s} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \cdots + \frac{1}{r}\right)$ si $r > s$.

2) Soit $P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n(1-x)^n)$ le n-ième *polynôme de Legendre*. Prouver que $P_n \in \mathbb{Z}[x]$.

3) On pose $K_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)(1-y)^n}{1-xy} dx\, dy$.

Démontrer que $K_n = b_n\zeta(2) + a_n$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

On note $\delta(n) = PPCM(1,2,\ldots,n)$. Vérifier que $q_n = [\delta(n)]^2 b_n$ et $p_n = [\delta(n)]^2 a_n$ sont entiers.

4) En utilisant le théorème 7.8, montrer que $|q_n| \leqslant (144)^n$.

5) Prouver que $K_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n y^n (1-x)^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\, dy$.

6) Montrer que $(1-x)(1-y) \leqslant (1-\sqrt{xy})^2$ pour tous $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. En déduire que :

$$|K_n| \leqslant \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \leqslant 1.65 \times (0.0902)^n.$$

7) En remarquant que $|K_n| \geqslant \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^n y^n (1-x)^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx\, dy$ pour $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ montrer que $|K_n| \geqslant 5 \cdot 10^{-8}(0.0832)^n$.

8) En utilisant l'exercice 9.17, trouver une mesure d'irrationalité pour π^2, puis pour π.

9.19 Soit α un nombre algébrique et P_α son polynôme minimal. Démontrer que P_α n'a pas de racine double.