Rappelons que, si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, de cardinal n, alors $p = \dfrac{1}{n}\sum_{g\in G} g$ est un projecteur (essentiellement parce que $g_0 p = p$ pour tout $g_0 \in G$). En outre, si G est un groupe d'isométries, p est un projecteur orthogonal car il est 1–lipschitzien, et en outre $p(x) = x$ si, et seulement si, x est laissé fixe par tous les éléments de G (essentiellement grâce au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire).
En d'autres termes, G est sans point fixe non trivial si, et seulement si, $p = 0$; supposons donc que G satisfait aux hypothèses de l'énoncé et que $p = 0$, afin d'aboutir à une contradiction. Choisissons v comme dans l'énoncé, et calculons de deux façons $S = ||p(v) - v||^2 = \dfrac{1}{n^2}||\sum_{g\in G} g(v) - nv||^2$.
D'une part, si $p = 0$, on a $S = 1$; d'autre part, puisque $\mathrm{Id}_E \in G$, on a aussi $S = \dfrac{1}{n^2}||\sum_{g\in G'}(g(v) - v)||^2$, où $G' = G \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$.
On a $n^2 S = A + B$, dans laquelle $A = \sum_{g\in G'} ||g(v) - v||^2 < (n-1)\dfrac{2n}{n-1} = 2n$, et $B = \sum_{g\neq h\in G'} < g(v) - v|h(v) - v >$. Évaluons ce second terme : $B = B_1 - B_2 + B_3$, où l'on a $B_1 = \sum_{g\neq h} < h^{-1}g(v)|v >$, $B_2 = \sum_{g\neq h} < g(v)|v > + < h(v)|v >$ et $B_3 = (n-1)(n-2)$.
On a $\sum_{g\neq h\in G'} h^{-1}g = -(n-2)\mathrm{Id}_E$ car aucun des termes de la somme n'est l'identité et car chacun des éléments de G' est présent $n-2$ fois ; ainsi $B_1 = -(n-2)$.
De même, $B_2 = -2(n-2)$, de sorte que $n^2 S < n^2$, ce qui est contradictoire.