Agrégation interne ; CAER 2016

Première épreuve

Olivier HALGAND

Partie I

1. Nous allons démontrer les contraposées, à savoir :

les boules fermées $B(a,1)$ et $B(a',1)$ ne sont pas disjointes si, et seulement si : $\|a-a'\| \geqslant 2$.

• **Condition suffisante** ($\Rightarrow$) : Supposons que les boules fermées $B(a,1)$ et $B(a',1)$ ne soient pas disjointes, et considérons $x \in B(a,1) \cap B(a',1)$.

On a donc : $\|x-a\| \geqslant 1$ et $\|x-a'\| \leqslant 1$. On en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\|a-a'\| = \|(a-x)+(x-a')\| \leqslant \|a-x\| + \|x-a'\| \leqslant 2. \qquad (\star)$$

• **Condition nécessaire** ($\Leftarrow$) : Supposons que $\|a-a'\| \leqslant 2$, et notons : $x = \frac{1}{2}(a+a')$. Alors :

$$x-a = -\frac{1}{2}(a-a') \quad \text{donc :} \quad \|x-a\| = \frac{1}{2}\|a-a'\| \leqslant 1, \quad \text{donc :} \quad x \in B(a,1).$$

De la même manière, on a aussi $x \in B(a',1)$ et donc : $x \in B(a,1) \cap B(a',1)$, ce qui prouve que les deux boules ne sont pas disjointes.

Donc :

$$\boxed{\text{les boules fermées } B(a,1) \text{ et } B(a',1) \text{ sont disjointes si, et seulement si : } \|a-a'\| > 2.}$$

2. • **Condition suffisante** ($\Rightarrow$) : Supposons que les deux boules soient tangentes. Elles ne sont donc pas disjointes, et ainsi $\|a-a'\| \leqslant 2$ d'après la question précédente et $\frac{1}{2}(a+a') \in \mathcal{B}(a,1) \cap B(a',1)$. Supposons alors que $d = \|a-a'\| < 2$, et considérons $x = \frac{a+(d-1)a'}{d}$. Nous allons montrer que $x \in B(a,1) \cap B(a',1)$ et puisque $x \neq \frac{1}{2}(a+a')$ cela impliquera que les deux boules ont au moins deux points communs, et donc qu'elles ne sont pas tangentes.

D'une part :

$$x-a = \frac{a+(d-1)a'}{d} - a = \frac{1-d}{d}(a-a') \quad \text{donc :} \quad \|x-a\| = |1-d| < 1 \quad \text{donc :} \quad x \in B(1,a);$$

d'autre part :

$$x-a' = \frac{a+(d-1)a'}{d} - a' = \frac{1}{d}(a-a') \quad \text{donc :} \quad \|x-a'\| = 1 \quad \text{donc :} \quad x \in B(1,a').$$

On obtient donc bien : $\|a-a'\| = 2$.

• **Condition nécessaire** ($\Leftarrow$) : Supposons que $\|a-a'\| = 2$ et considérons $x \in B(a,1) \cap B(a',1)$. Nous sommes alors dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire ($\star$) précédente, ce qui signifie que $\|a-x\| = \|x-a'\| = 1$, et que les vecteurs $a-x$ et $x-a'$ sont positivement proportionnels :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, a-x = \lambda(x-a').$$

On en déduit donc que $\lambda = 1$ et donc que : $x = \frac{1}{2}(a+a')$. Ainsi, les deux boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$ n'ont qu'un point d'intersection, c'est-à-dire qu'elles sont tangentes.

On obtient donc bien :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les boules fermées } B(a,1) \text{ et } B(a',1) \text{ sont tangentes si, et seulement si : } \|a-a'\| = 2 \\ \text{et dans ce cas leur point d'intersection est } \dfrac{1}{2}(a+a').\end{array}}$$

3. Puisque les deux boules $B(0,1)$ et $B(a,1)$ sont tangentes, on a, d'après la question précédente : $\|a\| = 2$, et de même : $\|a'\| = 2$. De plus, on a : $b = \frac{1}{2}a$ et $b' = \frac{1}{2}a'$, donc : $\|b\| = \|b'\| = 1$.

• On en déduit donc, d'après **1.** :

$$B(a,1) \cap B(a',1) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \|a - a'\| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \|2b - 2b'\| = \|2(b - b')\| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \|b - b'\| > 1.$$

Or :

$$\|b - b'\|^2 = (b - b') \cdot (b - b') = \|b\|^2 - 2b \cdot b' + \|b'\|^2 = 2 - 2b \cdot b'.$$

Donc :

$$B(a,1) \cap B(a',1) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2b \cdot b' > 1 \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot b' < \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{les boules fermées } B(a,1) \text{ et } B(a',1) \text{ sont disjointes si, et seulement si : } b \cdot b' < \tfrac{1}{2}.}$$

• De plus : $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont tangentes si, et seulement si : $\|a - a'\| = 2$,si, et seulement si : $\|b - b'\| = 1 = \|b\| = \|b'\|$. Donc :

$$\boxed{\text{les boules fermées } B(a,1) \text{ et } B(a',1) \text{ sont tangentes si, et seulement si, le triangle } 0bb' \text{ est équilatéral.}}$$

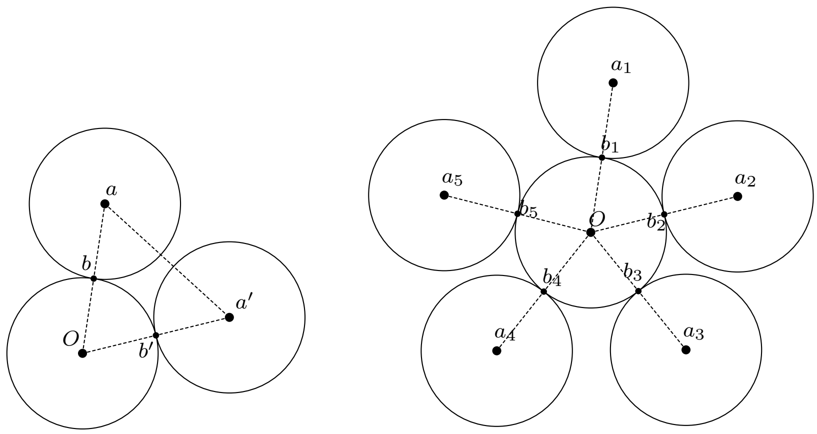

Figure 1 Figure 2

4. En utilisant les notations de la question précédente, les deux boules $B(a,1)$ et $B(a',1)$ sont disjointes si, et seulement si :

$$b \cdot b' = \|b\|.\|b'\|.\cos\widehat{b0b'} = \cos\widehat{b0b'} < \frac{1}{2} \quad \text{donc :} \quad \widehat{b0b'} > \frac{\pi}{3}.$$

Considérons des boules tangentes ou disjointes $B(a_1,1)$, $B(a_2,1)$, ..., toutes tangentes à $B(0,1)$ en b_1, b_2, ...respectivement comme illustré sur la figure 2 ci-dessus. Alors : $\widehat{b_1 0 b_2} \geqslant \frac{\pi}{3}$, $\widehat{b_2 0 b_3} \geqslant \frac{\pi}{3}$, ... Donc :

$$\widehat{b_1 0 b_2} + \widehat{b_2 0 b_3} + \widehat{b_3 0 b_4} + \widehat{b_4 0 b_5} + \widehat{b_5 0 b_6} + \widehat{b_6 0 b_1} \geqslant 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi.$$

On en déduit donc que : $\tau_2 \leqslant 6$. Enfin, si les triangles précédents sont deux à deux tangents (dans l'ordre de la numération) alors cette somme vaut 2π. Donc :

$$\boxed{\tau_2 = 6.}$$

5. **(a)** Déterminons le cardinal de A. Tout élément de A vérifie : $\displaystyle\prod_{i=1}^{8} x_i > 0$, ce qui signifie qu'il existe un nombre pair de coordonnées x_i négatives. De plus, il y a $\binom{8}{k}$ points de A ayant k coordonnées x_i négatives. Donc :

$$\mathrm{Card}(A) = \binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128.$$

Calculons maintenant le cardinal de B. Tout élément de B possède 6 coordonnées nulles parmi les 8, les deux autres valant $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc :

$$\mathrm{Card}(B) = \binom{6}{8} \times 2^2 = 28 \times 4 = 112.$$

Enfin, puisque A et B sont disjoints on a :

$$\boxed{\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) = 240.}$$

De plus :

$$\forall x \in A, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 8 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \quad \text{donc :} \quad x \in S_7;$$

et :

$$\forall x \in B, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \text{donc :} \quad x \in S_7.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{C = A \cup B \subset S_7.}$$

(b) • **Cas de deux éléments de** A : puisque $x \neq y$, il existe $i \in [\![1, 8]\!]$ tel que : $x_i y_i < 0$. Supposons que $x_i > 0$ et $y_i < 0$. Si toutes les autres coordonnées sont deux à deux égales, alors on aurait :

$$\prod_{k=1}^{8} x_k y_k = x_i y_i \left(\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 8 \\ k \neq i}} x_k^2 \right) < 0,$$

ce qui est impossible puisque $\displaystyle\prod_{i=1}^{8} x_i > 0$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{8} y_i > 0$. On en déduit donc qu'il existe deux entiers distincts i et j de $[\![1, 8]\!]$ tels que : $x_i y_i = x_j y_j < 0$. On a alors :

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{8} x_k y_k \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 8 \\ k \notin \{i,j\}}} x_k^2 + x_i y_i + x_j y_j = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

• **Cas de deux éléments de** B : puisque $x \neq y$, on ne peut avoir qu'un indice $i \in [\![1, 8]\!]$ tel que x_i et y_i soient non nuls et de même signe. Donc :

$$x \cdot y \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 7 \times 0 = \frac{1}{2}.$$

• **Cas d'un élément** $x \in A$ **et d'un élément** $y \in B$: Puisque y a alors 6 coordonnées nulles, on a :

$$x \cdot y \leqslant 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4} . \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall (x, y) \in C, \quad x \cdot y \leqslant \frac{1}{2}.}$$

(c) D'après ce qui précède, si x et y sont deux éléments distincts de C, alors $x \cdot y \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui signifie que les boules tangentes à $B(0, 1)$ en x et y sont disjointes ou tangentes. Et comme $\mathrm{Card}(C) = 240$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\tau_8 \geqslant 240.}$$

Partie II

6. Pour tout $x\mathbb{R}^n$, on a les égalités :

$$\|\sigma(x)\|^2 = \sigma(x)\cdot\sigma(x) = x\cdot {}^t\sigma\sigma(x) = x\cdot x = \|x\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in B(0,1),\quad \sigma(x) \in B(0,1).}$$

7. L'application t_σ est la restriction de σ à $B(0,1)$, donc c'est une application linéaire. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, t_σ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sur $B(0,1)$. Donc, par composeé de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$:

$$\boxed{f\circ t_\sigma \in C_n.}$$

Notons $A = (a_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ la matrice de t_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour $x \in B(0,1)$, $t_\sigma(x) = (y_1,\ldots,y_n) \in B(0,1)$. Alors on peut écrire :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\quad y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k.$$

On en déduit donc que : $\dfrac{\partial t_\sigma}{\partial x_i}(x) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$.

De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{\partial(f\circ t_\sigma)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\circ t_\sigma\right)\left[\frac{\partial t_\sigma}{\partial x_i}(x)\right]_j = \sum_{j=1}^n a_{ji}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\circ t_\sigma\right).$$

De la même manière, on a donc :

$$\frac{\partial^2(f\circ t_\sigma)}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^n a_{ji}\left[\sum_{k=1}^n a_{ki}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\,\partial y_k}\circ t_\sigma\right)\right].$$

On a donc :

$$\Delta(f\circ t_\sigma) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(f\circ t_\sigma)}{\partial x_i^2} = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} a_{ji}a_{ki}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\,\partial y_k}\circ t_\sigma\right)$$

d'où :

$$\Delta(f\circ t_\sigma) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\,\partial y_k}\circ t_\sigma\right)\left[\sum_{i=1}^n a_{ji}a_{ki}\right].$$

Or, l'expression entre crochets représente le produit scalaire de deux vecteurs colonnes de la matrice orthogonale A : elle vaut donc δ_{jk} (symbole de Kronecker), c'est-à-dire 0 si $j\neq k$ et 1 si $j=k$. On obtient donc :

$$\Delta(f\circ t_\sigma) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_j\,\partial y_k}\circ t_\sigma\right)\delta_{jk} = \sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}\circ t_\sigma\right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}\right)\circ t_\sigma,$$

soit :

$$\boxed{\Delta(f\circ t_\sigma) = (\Delta f)\circ t_\sigma.}$$

8. • Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que : $\alpha_1+\cdots+\alpha_n = k$. On a donc, avec les notations précédentes :

$$\forall x \in B(0,1),\quad x^\alpha\circ t_\sigma(x) = \big(t_\sigma(x)\big)^\alpha = \prod_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^{\alpha_i}.$$

Ainsi, $x^\alpha\circ t_\sigma(x)$ est une combinaison linéaire des $x_i^{\alpha_i}$. De plus, l'expression entre parenthèse est une fonction polynomiale homogène de degré α_i, ce qui permet d'affirmer que, par produit, $x^\alpha\circ t_\sigma$ est une fonction polynomiale où chaque terme est de degré $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$. Donc : $x^\alpha \circ t_\sigma \in M_k$. Par combinaison linéaire , on en déduit que :

$$\boxed{f \in M_k \quad \Rightarrow \quad f \circ t_\sigma \in M_k.}$$

- De plus, si $\Delta f = 0$ alors, d'après **7.**, $\Delta(f \circ t_\sigma) = (\Delta f) \circ t_\sigma = 0$. Donc :

$$\boxed{f \in H_k \quad \Rightarrow \quad f \circ t_\sigma \in H_k.}$$

9. Soient $f, g \in C_n$ et $\sigma \in G$. Alors :

$$\langle f \circ t_\sigma \mid g \circ t_\sigma \rangle = \left(\int_{B(0,1)} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \right)^{-1} \int_{B(0,1)} \big(f \circ t_\sigma(x)\big)\big(g \circ t_\sigma(x)\big) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Effectuons le changement de variable : $y = t_\sigma(x)$, de sorte que : $\mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = \big|\det(t_\sigma)\big| \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$, avec $\det(t_\sigma) = \pm 1$. Et de plus, on a vu en **6.** que :

$$\forall x \in B(0,1), \forall \sigma \in G, \ \sigma(x) \in B(0,1) \qquad \text{et de même pour } \sigma^{-1},$$

donc on en déduit que : $\sigma\big(B(0,1)\big) = B(0,1)$. On obtient donc :

$$\boxed{\langle f \circ t_\sigma \mid g \circ t_\sigma \rangle = \left(\int_{B(0,1)} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \right)^{-1} \int_{B(0,1)} f(y) g(y) \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = \langle f \mid g \rangle.}$$

10. **(a)** Soient $x, y \in B(0,1)$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Alors, il existe une rotation $\sigma \in G$ telle que : $y = \sigma(x) = t_\sigma(x)$. On peut donc écrire :

$$f(y) = f\big(t_\sigma(x)\big) = f \circ t_\sigma(x).$$

Or, $f \circ t_\sigma = f$ par hypothèse, donc :

$$\forall x, y \in B(0,1), \quad \|x\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(y).$$

(b) D'une part : $\forall t \in [-1,1], \|(0, \ldots, 0, t)\| = \sqrt{0^2 + \ldots + 0^2 + t^2} = |t| = \|(0, \ldots, 0, |t|)\|$, et : $(0, \ldots, 0, t) \in B(0,1)$. Donc d'après **10.(a)** :

$$f(0, \ldots, 0, t) = f(0, \ldots, 0, |t|),$$

soit :

$$\boxed{\forall t \in [-1,1], \quad g(t) = g\big(|t|\big).}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in B(0,1)$: $\|x\| = \big\|(0, \ldots, 0, \|x\|)\big\|$, et donc, toujours d'après **10.(a)** :

$$\boxed{\forall x \in B(0,1), \quad f(x) = g\big(\|x\|\big).}$$

(c) • On a donc :

$$\forall x \in B(0,1), -x \in B(0,1) \quad \text{et :} \quad f(-x) = g\big(\|-x\|\big) = g\big(\|x\|\big) = f(x),$$

donc l'application f est paire. Donc, nécessairement :

$$\boxed{k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \text{ est pair.}}$$

- Puisque $f \in M_k$ n'est pas nulle, il existe une famille $(\alpha^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{N}^n$ deux à deux distincts vérifiant : $\forall i \in [\![1,p]\!], \alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_n^{(i)} = k$, et une famille de réels non nuls $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ telle que f s'écrive sous la forme :

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^{\alpha^{(i)}}, \quad \text{soit :} \quad \forall x \in B(0,1), f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_1^{\alpha_1^{(i)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i)}}.$$

Soit $x \in B(0,1)$ tel que : $f(x) \neq 0$. Puisque $\|x\| = \big\|(0,\ldots,0,\|x\|)\big\|$, on a d'après **10.(a)** : $f(x) = f\big(0,\ldots,0,\|x\|\big) \neq 0$ et il donc existe $j \in [\![1,p]\!]$ tel que : $\alpha_n^{(j)} = k$ et $\alpha_1^{(j)} = \ldots = \alpha_{n-1}^{(j)} = 0$. On obtient donc (en renommant λ_j en λ) : $f(x) = \lambda \|x\|^k$.

Or, d'après **10.(a)** : $\forall y \in B(0,1),\ \|y\| = \|x\| \quad \Rightarrow \quad f(y) = f(x) = \lambda\|x\|^k = \lambda\|y\|^k$.
On en déduit donc que :

$$\forall y \in B(0,\|x\|), \quad f(y) = \lambda\Big(\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}\Big)^k = \lambda\Big(y_1^2+\ldots+y_n^2\Big)^{\frac{k}{2}}.$$

Or, la boule $B(0,\|x\|)$ contient une infinité de points, et les familles $(\alpha^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ sont finies. Donc cette égalité détermine entièrement les deux familles. On peut donc étendre l'égalité à la boule $B(0,1)$ en entier :

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in B(0,1), \quad f(x) = \lambda\|x\|^k.}$$

Partie III

11. (a) Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ un polynôme de degré k de $\mathbb{R}[X]$. Si P s'annule sur l'intervalle $]-s,s[$ (avec $s>0$), alors P possède une infinité de racines. Or, d'après le théorème de d'Alembert, si P n'est pas nul, il possède au plus k racines dans $\mathbb{R}$. Donc, $P=0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall i \in [\![0,k]\!], \quad a_i = 0.}$$

(b) On fixe $k \geqslant 0$, et on raisonne par récurrence sur n. On notera $I_n = (\alpha^{(i)})$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}^n$ tels que : $\alpha_1^{(i)} + \ldots + \alpha_n^{(i)} \leqslant k$, et $c_n = \mathrm{Card}(I_n)$.

• **Initialisation** : Pour $n=1$, alors : $(x^\alpha) = (x^0,\ldots,x^k)$. On reconnaît les fonctions polynomiales associées à la base canonique de $\mathbb{R}_k[X]$: la famille est donc libre.

• **Hérédité** : Supposons que la famille $(x^\alpha)_{\alpha\in I_n}$ est libre, n étant un entier naturel non nul donné. On considère alors la famille $(x^\alpha)_{\alpha\in I_{n+1}}$, et une famille $(\lambda_i)_{i\in I_{n+1}}$ de réels telle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{c_{n+1}} \lambda_i\, x^{\alpha^{(i)}} = 0$.
On a donc :

$$\forall x \in B(0,1), \quad \sum_{i=1}^{c_{n+1}} \lambda_i\, x_1^{\alpha_1^{(i)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i)}}\, x_{n+1}^{\alpha_{n+1}^{(i)}} = 0.$$

Fixons $x_1,\ldots,x_n$ tels que : $x_1^2+\ldots+x_n^2 < 1$. Alors :

$$x \in B(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1}^2 \leqslant 1-(x_1^2+\ldots+x_n^2) = s^2, \quad \text{avec : } s>0.$$

Considérons alors le polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j X^j$ où : a_j est obtenu en regroupant les termes où $\alpha_{n+1}^{(i)} = j$, c'est-à-dire les termes $\lambda_i\, x_1^{\alpha_1^{(i)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i)}}$ vérifiant : $\alpha_1^{(i)}+\ldots+\alpha_n^{(i)} \leqslant k-j$. Ce polynôme P s'annule sur $]-s,s[$ et donc, d'après **11.(a)** : $\forall j \in [\![0,k]\!],\ a_j = 0$. On en déduit donc que :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad a_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant c_{n+1}\\ \alpha_1^{(i)}+\ldots+\alpha_n^{(i)}\leqslant k-j}} \lambda_i\, x_1^{\alpha_1^{(i)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i)}} = 0.$$

Or, $\alpha_1^{(i)}+\ldots+\alpha_n^{(i)} \leqslant k-j \leqslant k$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, qui permet de conlure que $\forall i \in [\![1,c_{n+1}]\!], \lambda_i = 0$, et donc la famille $(x^\alpha)_{\alpha\in I_{n+1}}$ est libre.

• **Conclusion** : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ la famille } (x^\alpha)_{\alpha\in I_n} \text{ est libre.}}$$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre fini non nul $N_{k,n}$ de n-uplets $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$. En effet, d'une part : $k = k + 0 + \ldots + 0$ donc $N_{k,n} \neq 0$, et $\forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i \leqslant k$ donc $N_{k,n} \leqslant k^n$.

De plus, d'après la question précédente, la famille des $(x^\alpha)_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_+ \ldots + \alpha_n = k}}$ est libre et engendre l'ensemble M_k. Donc :

$$\boxed{M_k = Vect(x^\alpha) \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension finie } N_{k,n} \text{ de } C_n.}$$

12. L'ensemble K est le stabilisateur de e_n ; c'est donc un sous-groupe de G. De plus, matriciellement, $\sigma \in K$ s'écrit sous la forme (puisque $\sigma(e_n) = e_n$) :

$$S = \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline L_{n-1} & 1 \end{array}\right) \qquad \text{avec : } \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \\ L_{n-1} \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}) \end{array}.$$

Alors :

$${}^tS.S = \left(\begin{array}{c|c} {}^t\text{A} & {}^tL_{n-1} \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{array}\right) . \left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline L_{n-1} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^t\text{A.A} & {}^tL_{n-1} \\ \hline L_{n-1} & 1 \end{array}\right).$$

Or, puisque $\sigma \in G$, on a : ${}^tS.S = I_n$ et donc : ${}^tA.A = I_{n-1}$ et $L_{n-1} = 0$. Ainsi, les éléments de K s'écrivent matriciellement sous la forme : $\left(\begin{array}{c|c} \text{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$, qui est clairement isomorphe à $\mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{K \text{ est un sous-groupe de } G \text{ isomorphe à } \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R}).}$$

13. • Démontrons l'injectivité : soit $(c_0, \ldots, c_{[k/2]}) \in Ker(\varphi)$. Alors :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1), \quad \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^j x_n^{k-2j} = 0.$$

Si on se fixe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ tels que : $0 < x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 1 - s^2 < 1$ (avec $s > 0$), alors on obtient : $(x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 \leqslant s^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \in [-s, s]$. Et donc :

$$\forall x_n \in \,]-s, s[, \quad \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (1 - s^2)^j x_n^{k-2j} = 0.$$

Donc, comme en **11.(a)**, on en déduit que : $\forall j \in [\![0, [k/2]]\!], c_j(1-s^2)^j = 0$, et donc : $c_j = 0$. Ainsi, $ker(\varphi) = 0$ et

$$\boxed{\varphi \text{ est injective.}}$$

• Déterminons $Im(\varphi)$: Pour tout entier j, puisque $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ est un polynôme homogène de degré 2, donc $(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}$ est un polynôme homogène de degré $2j + (k - 2j) = k$. On en déduit donc que, pour tout $(c_0, \ldots, c_{[k/2]}) \in \mathbb{R}^{[k/2]+1}$, $\varphi((c_0, \ldots, c_{[k/2]})$ est une combinaison linéaire de x^α avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$. On en déduit donc que $Im(\varphi) \subset M_k$.

♢ Maintenant, soit $\sigma \in K$ et $f \in Im(\varphi)$. Alors, avec les notations de **7.** et les résultats du **12.**, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathcal{B}(0,1), \quad t_\sigma(x) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}x_j, x_n \right).$$

Donc :

$$\forall x \in B(0,1), \quad f \circ t_\sigma(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}x_j \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}x_j \right)^2 \right]^j x_n^{k-2j}.$$

Or, avec les notations de **12.** et $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ on a (avec les notations matricielles) :

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}x_j \right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j}x_j \right)^2 = \left\| Ax' \right\|^2 = {}^t x' {}^t A.Ax' = {}^t x' I_{n-1} x' = {}^t x'.x' = \|x'\|^2.$$

Donc :

$$\forall x \in B(0,1), \quad f \circ t_\sigma(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^j x_n^{k-2j} = f(x).$$

On a donc :

$$\forall f \in Im(\varphi), f \in M_k \quad \text{et :} \quad \forall \sigma \in K, f \circ t_\sigma = f \quad \text{soit :} \quad Im(\varphi) \subset \left\{ f \in M_k, \forall \sigma \in K, f \circ t_\sigma = f \right\}.$$

♢ Réciproquement, soit $f \in M_k$ telle que : $\forall \sigma \in K, f \circ t_\sigma = f$. Posons :

$$f = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j x^{\alpha^{(j)}} = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j x_1^{\alpha_1^{(j)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(j)}}.$$

Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on pose $J_i = \left\{ j \in [\![1, N_{k,n}]\!], \alpha_n^{(j)} = i \right\}$ et :

$$\widetilde{f}_i : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \sum_{j \in J_i} \lambda_j x_1^{\alpha_1^{(j)}} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}^{(j)}}.$$

Enfin, si $\sigma \in K$ a pour matrice S, on note $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ l'application de matrice A (comme dans **12.**). On obtient alors que $\widetilde{f}_i \in M_{k-i}$ et $\widetilde{f}_i \circ t_{\widetilde{\sigma}} = \widetilde{f}_i$. On peut donc appliquer **10.** : $k - i$ est pair et

$$\exists \mu_i \in \mathbb{R}^*, \forall x \in B_{n-1}(0,1), \quad \widetilde{f}_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu_i \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^{\frac{k-i}{2}}.$$

On obtient donc :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant k \\ k-i \text{ pair}}} \mu_i \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^{\frac{k-i}{2}} x_n^i.$$

En posant le changement d'indice : $j = \frac{k-i}{2} \Leftrightarrow i = k - 2j$ et $c_j = \mu_{k-2j}$, on obtient :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^j x_n^{k-2j},$$

ce qui prouve que $f \in Im(\varphi)$.

Finalement, on a démontré que :

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire injective, dont l'image est : } Im(\varphi) = \left\{ f \in M_k, \forall \sigma \in K, f \circ t_\sigma = f \right\}.}$$

14. **(a)** Par hypothèse :

$$\forall x \in B(0,1), \quad f(x) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)^j x_n^{k-2j}.$$

Donc :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \forall x \in B(0,1), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{[k/2]} 2jc_j x_i \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j},$$

et ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{j=1}^{[k/2]} 2jc_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j} + \sum_{j=2}^{[k/2]} 4j(j-1)c_j x_i^2 \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-2} x_n^{k-2j}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) &= (n-1) \sum_{j=1}^{[k/2]} 2jc_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j} \\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right) \left(\sum_{j=2}^{[k/2]} 4j(j-1)c_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-2} x_n^{k-2j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{[k/2]} \big[2(n-1)j + 4j(j-1)\big] c_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j} \\
&= \sum_{j=1}^{[k/2]} 2j(n+2j-3)c_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j}
\end{aligned}$$

On a aussi de manière immédiate :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{j=0}^{[k/2]-1} c_j \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j} (k-2j)(k-2j-1) x_n^{k-2j-2} \\
&= \sum_{j=1}^{[k/2]} c_{j-1} \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} (k-2j+2)(k-2j+1) x_n^{k-2j}.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^{[k/2]} \Big[2j\big(n+2j-3\big)c_j + (k-2j+2)(k-2j+1)c_{j-1}\Big] \big(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\big)^{j-1} x_n^{k-2j}.}$$

(b) Par définition, $R_k = H_k \cap Im(\varphi)$; c'est donc un sous-espace vectoriel de H_k (en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels).

Considérons $f \in R_k$. Alors $\Delta(f) = 0$ et il existe $(c_0, \ldots, c_{[k/2]}) \in \mathbb{R}^{[k/2]+1}$ tel que : $f = \varphi(c_0, \ldots, c_{[k/2]})$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\forall j \in [\![1, [k/2]]\!], \quad \alpha_j c_j + \beta_j c_{j-1} = 0 \quad \text{avec :} \quad \alpha_j = 2j(n+2j-3) \quad \text{et :} \quad \beta_j = (k-2j+2)(k-2j+1).$$

De plus, $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$, donc : $n + 2j - 3 \geqslant 1$, ce qui implique que $c_j \neq 0$. On a donc : $\forall j \in [\![1, [k/2]]\!],\ c_j = -\frac{\beta_j}{\alpha_j} c_{j-1}$. Ainsi, les coefficients c_j forment une suite (finie) récurrente d'ordre 1, dépendant uniquement de c_0. Donc :

$$\boxed{R_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } H_k \text{ de dimension 1.}}$$

(c) Puisque pour tout $j \in [\![1, [k/2]]\!]$ onb a : $c_j \geqslant 1$ et $\beta_j > 0$, on en déduit que $-\frac{\beta_j}{\alpha_j} < 0$. Donc :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, [k/2]]\!], \quad c_j c_{j-1} < 0.}$$

De plus : $1 - X^2$ est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant -1, donc $(1 - X^2)^j$ est un polynôme de degré $2j$ de coefficient dominant $(-1)^j$. Ainsi, chaque terme $c_j(1 - X^2)^j X^{k-2j}$ est de degré k et de coefficient dominant $(-1)^j c_j$. Or, puisque pour tout j : $c_j c_{j-1} < 0$, on a :

• si $c_0 > 0$, alors $c_j > 0$ si j est pair et $c_j < 0$ si j est impair. Donc $(-1)^j c_j > 0$ pour tout j. Ainsi, les coefficients dominants ne s'annulent pas.

• si $c_0 < 0$, alors $c_j < 0$ si j est pair et $c_j > 0$ si j est impair. Donc $(-1)^j c_j < 0$ pour tout j. Ainsi, les coefficients dominants ne s'annulent pas.

Finalement :

$$\boxed{\text{le polynôme } \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j(1-X^2)^j X^{k-2j} \text{ est un un polynôme de degré } k.}$$

15. **(a)** • **Unicité :** Supposons qu'il existe deux fonctions f_a et g_a dans H_k telles que :

$$\forall f \in H_k, \langle f \mid f_a\rangle = \langle f \mid g_a\rangle = f(a).$$

Alors : $\forall f \in H_k, \langle f \mid f_a - g_a\rangle = 0$, c'est-à-dire : $(f_a - g_a) \in H_k^{\perp}$. Or, $(f_a - g_a) \in H_k$ et $H_k \cap H_k^{\perp} = \{0\}$. Donc $f_a = g_a$.

• **Existence :** l'espace vectoriel M_k étant de dimension finie, il en est de même de son sous-espace vectoriel H_k. Considérons donc une base $(u_1, \ldots, u_p)$ de H_k que l'on peut considérer orthonormale (ou qu'on orthonormalise à l'aide du procédé de Gram-Schmidt).

Soient $f, f_a \in H_k$: il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que :

$$f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j \quad \text{et :} \quad f_a = \sum_{j=1}^{p} \mu_j u_j.$$

On a donc : $\langle f \mid f_a\rangle = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mu_j$ et $f(a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j(a)$. En posant, pour tout $j \in [\![1, p]\!], \mu_j = u_j(a)$, on obtient donc le résultat voulu.

On a donc démontré que :

$$\boxed{\exists !\, f_a \in H_k, \quad \forall f \in H_k, \quad \langle f \mid f_a\rangle = f(a).}$$

(b) Soit $\sigma \in G$ tel que : $\sigma(a) = a$. D'après **9.**, σ est une bijection de $B(0,1)$ sur $B(0,1)$, donc on peut écrire : $(t_\sigma)^1 = t_{\sigma^{-1}}$. De plus, d'après **8.**, si $f \in H_k \subset M_k$, alors $f \circ t_\sigma \in M_k$ et donc, d'après **9.** :

$$\langle f \mid f_a \circ t_\sigma\rangle = \langle f \circ (t_\sigma)^{-1} \circ t_\sigma \mid f_a \circ t_\sigma\rangle = \langle f \circ t_{\sigma^{-1}} \mid f_a\rangle = f \circ t_{\sigma^{-1}}(a).$$

Et puisque $\sigma(a) = t_\sigma(a) = a$ on a : $t_{\sigma^{-1}}(a) = a$ et donc :

$$\langle f \mid f_a \circ t_\sigma\rangle = f(a).$$

D'après l'unicité de f_a, on en déduit donc que :

$$\boxed{f_a \circ t_\sigma = f_a.}$$

(c) • **Unicité :** Supposons qu'il existe deux polynômes p_k et q_k tels que :

$$\forall x \in S_{n-1}, f_{e_n}(x) = p_k(x_n) = q_k(x_n).$$

Alors : $\forall x \in S_{n-1}, (p_k - q_k)(x_n) = 0$, et donc : $\forall x_n \in]-1, 1[, (p_k - q_k)(x_n) = 0$, c'est-à-dire , d'après **11.(a)** : $p_k - q_k = 0$.

• **Existence :** Par définition, $f_{e_n} \in R_k \subset Im(\varphi)$. Donc, il existe $(c_0, \ldots, c_{[k/2]}) \in \mathbb{R}^{[k/2]+1}$ tel que : $f_{e_n} = \varphi(c_0, \ldots, c_{[k/2]})$. On a donc :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1), \quad f_{e_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2)^j x_n^{k-2j}.$$

Or, puisque $x \in S_{n-1}$, on a : $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1$, et on obtient donc :

$$f_{e_n}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (1 - x_n^2)^j x_n^{k-2j} = p_k(x_n) \quad \text{avec :} \quad p_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} c_j (1 - X^2)^j X^{k-2j}.$$

Finalement :

$$\boxed{\exists!\, p_k \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in S_{n-1}, \quad f_{e_n}(x) = p_k(x_n).}$$

(d) Le polynôme p_k est de degré k et son coefficient dominant est du signe de c_0 d'après **14.(c)**. Or :

$$f_{e_n}(e_n) = f_{e_n}(0, \ldots, 0, 1) = c_0 \quad \text{et :} \quad f_{e_n}(e_n) = \langle f_{e_n} \mid f_{e_n} \rangle = \|f_{e_n}\|^2 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{le polynôme } p_k \text{ est un un polynôme de degré } k \text{ de coefficient dominant } c_0 > 0.}$$

(e) • Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma(e_n) = a$. Alors, $\forall f \in H_k$,

$$\langle f \mid f_a \circ t_\sigma \rangle = \langle f \circ (t_\sigma)^{-1} \circ t_\sigma \mid f_a \circ t_\sigma \rangle = \langle f \circ t_{\sigma^{-1}} \mid f_a \rangle = f \circ t_{\sigma^{-1}}(a).$$

Et puisque $\sigma(e_n) = t_\sigma(e_n) = a$ on a : $t_{\sigma^{-1}}(a) = e_n$ et donc :

$$\langle f \mid f_a \circ t_\sigma \rangle = f(e_n).$$

D'après l'unicité de f_{e_n}, on en déduit donc que :

$$\boxed{f_a \circ t_\sigma = f_{e_n}.}$$

• De plus, si $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$x \cdot a = x \cdot \sigma(e_n) = {}^t\sigma(x) \cdot e_n,$$

et puisque ${}^t\sigma = \sigma^{-1}$ car $\sigma \in G$, on conclut :

$$\boxed{x \cdot a = \sigma^{-1}(x) \cdot e_n.}$$

(f) Voir **15.(a)**.

(g) Soit $b \in S_{n-1}$. Alors, d'après **15.(f)** :

$$f_a(b) = \sum_i u_i(a) u_i(b) = f_b(a).$$

De plus, en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} p_k(a \cdot b) = p_k(b \cdot a) \quad &= p_k(\sigma^{-1}(b) \cdot e_n) && \text{d'après } \textbf{15.(e)} \\ &= f_{e_n}(\sigma^{-1}(b)) && \text{d'après } \textbf{15.(c)} \\ &= f_{e_n} \circ t_{\sigma^{-1}}(b) && \\ &= (f_a \circ t_\sigma) \circ (t_\sigma)^{-1}(b) && \text{d'après } \textbf{15.(e)} \\ &= f_a(b) && \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall b \in S_{n-1}, \quad f_a(b) = f_b(a) = p_k(a \cdot b) = \sum_i u_i(a) u_i(b).}$$

Partie IV

16. Le polynôme p_0 est de degré 0 (d'après **15.(d)**), c'est-à-dire qu'il est constant. De plus, $M_0 = H_0$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $B(0,1)$. Si on note alors K_f la valeur constante prise par $f \in H_0$, alors : $\forall a \in S_{n-1}, \forall f \in H_0, \quad \langle f \mid 1 \rangle = K_f = f(a) = \langle f \mid f_a \rangle$, et donc : $f_a = 1$ d'après l'unicité démontrée en **15.(a)**. En particulier, $f_{e_n} = 1$ et donc :

$$\boxed{p_0 = 1.}$$

17. • D'après **15.(c)**, on a :

$$p_1 = \sum_{j=0}^{[1/2]} c_j (1 - X^2)^j X^{1-2j} = c_0 (1 - X^2)^0 X = c_0 X.$$

Or, d'après **15.(d)** le coefficient dominant est > 0, donc :

$$\boxed{\exists \lambda_1 > 0, \quad p_1 = \lambda_1 X.}$$

• De même :

$$p_1 = \sum_{j=0}^{[2/2]} c_j (1 - X^2)^j X^{2-2j} = c_0 (1 - X^2)^0 X^2 + c_1 (1 - X^2) = (c_0 - c_1) X^2 + c_1,$$

avec : $c_0 - c_1 > 0$ et $c_0 c_1 < 0$; on en déduit que $c_0 > 0$. De plus, d'après **14.0(a)** :

$$\alpha_1 = 2(n+2-3) = 2n-2 \quad \text{et :} \quad \beta_1 = (2-2+1)(2-2+2) = 2, \quad \text{donc :} \quad c_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} c_0 = -\frac{1}{n-1} c_0.$$

On en déduit donc que : $c_0 - c_1 = c_0 + \dfrac{1}{n-1} c_0 = \dfrac{n}{n-1} c_0$. Ce qui donne :

$$\boxed{p_2 = \frac{c_0}{n-1}(nX^2 - 1) \quad \text{avec :} \quad c_0 > 0.}$$

18. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et d'après **15.(g)** :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} p_k(v_i \cdot v_j) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \left(\sum_h u_h(v_i) u_h(v_j) \right) \\
&= \sum_h \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} u_h(v_i) u_h(v_j) \right) \right) \\
&= \sum_h \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} u_h(v_i) \right) \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} u_h(v_j) \right) \\
&= \sum_h \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} u_h(v_i) \right)^2
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} p_k(v_i \cdot v_j) \geqslant 0.}$$

19. • On peut donc écrire, d'une part :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} f(v_i\cdot v_j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left(\sum_{h=0}^{s} a_h p_h(v_i\cdot v_j)\right) = \sum_{h=0}^{s} a_h\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} p_h(v_i\cdot v_j)\right) \geqslant a_0 \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} p_0(v_i\cdot v_j),$$

puisque les a_h sont positifs par hypothèse, et d'après **18.** : $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant m} p_h(v_i\cdot v_j)\geqslant 0$ pour tout $h\in\mathbb{N}$. De plus, comme $p_0=1$ d'après **16.**, on a donc la minoration :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} f(v_i\cdot v_j)\geqslant a_0 m^2.$$

• D'autre part, on a aussi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall i,j\in[\![1,m]\!],\quad |v_i\cdot v_j|\leqslant \|v_i\|\,\|v_j\| = 1.$$

Donc, $-1\leqslant v_i\cdot v_j\leqslant 1$. Ainsi, d'après l'hypothèse :

$$\forall i,j\in[\![1,m]\!],\quad i\neq j\quad\Rightarrow\quad -1\leqslant v_i\cdot v_j\leqslant \frac{1}{2},\quad \text{donc :}\quad f(v_i\cdot v_j)\leqslant 0.$$

D'où :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} f(v_i\cdot v_j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} f(v_i\cdot v_i) + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant m\\ i\neq j}} f(v_i\cdot v_j) = mf(1) + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant m\\ i\neq j}} f(v_i\cdot v_j)\leqslant mf(1).$$

• On a donc l'encadrement :

$$a_0 m^2\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} f(v_i\cdot v_j)\leqslant mf(1),$$

et donc :

$$\boxed{m\leqslant \frac{f(1)}{a_0}.}$$

20. D'après **5.(a)(b)**, $C\subset S_7$ et pour tout couple (x,y) d'éléments distincts de C, on a : $x\cdot y\leqslant \frac{1}{2}$.

On considère de plus :

$$f = p_0 + p_1 + \frac{5}{7}p_2 + \frac{13}{28}p_3 + \frac{19}{84}p_4 + \frac{5}{56}p_5 + \frac{5}{252}p_6 = \frac{320}{3}(X+1)\left(X+\frac{1}{2}\right)^2 X^2\left(X-\frac{1}{2}\right).$$

Alors, sur $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, f est négative.
On peut donc appliquer le résultat de la question **19.**, ce qui nous permet d'affirmer que :

$$\tau_8\leqslant m\leqslant f(1) = \frac{320}{3}\times 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times 1^2\times\frac{1}{2} = 240.$$

Donc, en utilisant **5.(c)**, on en déduit que :

$$\boxed{\tau_8 = 240.}$$

Partie V

21. Comme en **18.** :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} p_k(v_i\cdot v_j)x_ix_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m}\left(\sum_h u_h(v_i)u_h(v_j)\right)x_ix_j = \sum_h\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m} u_h(v_i)x_i\right)^2\geqslant 0.$$

Donc,

$$\boxed{\text{la matrice } \left(p_k(v_i\cdot v_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m} \text{ est positive.}}$$

22. **(a)** Puisque S est une matrice symétrique réelle positive, elle est ortogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients positifs, c'est-à-dire :

$$\exists P \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R}), \exists D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \quad \text{avec :} \quad \lambda_i \geqslant 0, \qquad S = {}^tPDP.$$

De pus, puisque S est de rang $r \leqslant n$ par hypothèse, on a aussi $r \leqslant m$ de sorte qu'on peut considérer les coefficients diagonaux λ_i de D tels que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \lambda_i > 0, \qquad \text{et :} \qquad i > r \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0.$$

Considérons alors la matrice $D' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie de la manière suivante :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!], d'_{ij} = 0 \quad \text{si :} \quad i \neq j, \quad \text{et :} \quad d'_{ii} = \sqrt{\lambda_i}.$$

Ainsi, si $n \leqslant m$ on ajoute $m - n$ colonnes de 0 à droite de $\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$; et si $n \geqslant m$ alors on ajoute $n - m$ lignes de 0 en bas de $\mathrm{Diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$. On a donc : ${}^tD'.D' = D$ et donc :

$$S = {}^tP{}^tD'.D'P.$$

Finalement, en posant $A = D'P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ on obtient : $S = {}^tA.A$, et donc :

$$\boxed{\exists A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), \quad S = {}^tA.A.}$$

(b) Il suffit de vérifier que l'on peut écrire : $\forall i, j \in [\![1, m]\!], s_{ij} = v_i \cdot v_j$ avec $v_i, v_j \in S_{n-1}$, c'est-à-dire que $|s_{ij}| \leqslant 1$; on pourra alors appliquer le résultat de **21.**

Or, par hypothèse : $\forall i \in [\![1, m]\!], s_{ii} = 1 = v_i \cdot v_i$. Raisonnons alors par l'absurde en supposant que : $\max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant m} |s_{ij}| > 1$. Il existe donc $i_0, j_0 \in [\![1, m]\!]$ tels que : $i_0 \neq j_0$ et $|s_{i_0j_0}| > 1$. En notant aussi $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, considérons alors la matrice-colonne $X = e_{i_0} - e_{j_0}$. On a alors :

$${}^tXSX = -2s_{i_0j_0} + s_{i_0i_0} + s_{j_0j_0} = -2s_{i_0j_0} + 2 < 0,$$

d'où une contradiction. Donc :

$$\forall i, j \in [\![1, m]\!], \quad |s_{i,j}| \leqslant 1.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{la matrice } \big(p_k(s_{ij})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \text{ est positive.}}$$

(c) Il suffit de considérer la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et alors :

$${}^tXSX = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} s_{ij} \geqslant 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la somme des coefficients d'une matrice symétrique positive est positive.}}$$

(d) D'après **22.(b)**, la matrice $\big(p_k(s_{ij})\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ est symétrique positive. Donc, d'après **22.(c)** (et avec $k = 2$) :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} p_2(s_{ij}) \geqslant 0.$$

Or, d'après **17.** : $p_2 = \lambda_2(nX^2 - 1)$ avec $\lambda_2 > 0$. On obtient donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \lambda_2(ns_{ij}^2 - 1) \geqslant 0.$$

On en déduit donc :

$$n \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} s_{ij}^2 \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} 1 = m^2.$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} s_{ij}^2 \geqslant \frac{m^2}{n}.}$$