Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le symétrique d'un foyer par rapport à cette droite appartienne au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

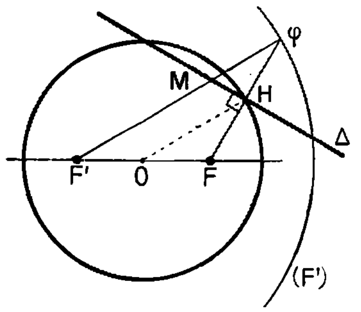

Fig. 380.

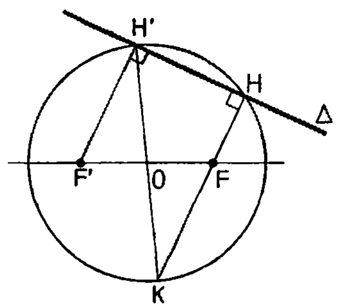

Fig. 381.

2° Le lieu de φ étant le cercle directeur F', l'homothétie (F, ½) montre que le lieu du milieu H de Fφ est le cercle principal (n° 428). Donc :

Le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes à une ellipse est le cercle principal de cette ellipse.

De la discussion du n° 430 il résulte qu'une tangente à l'ellipse n'a pas, en dehors de son point de contact, d'autre point commun avec l'ellipse et que :

Une droite donnée est tangente, sécante ou extérieure à une ellipse suivant que la projection d'un foyer sur cette droite est située sur le cercle principal, à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle.

3° Désignons par H et H′ les projections des foyers F et F′ de l'ellipse sur une droite donnée Δ (fig. 381). Le milieu O de FF′ appartient à la médiatrice de HH′ et comme l'angle H′HF est droit, le cercle de centre O, passant par H et H′, recoupe FH en un point K diamétralement opposé à H′. La puissance de F par rapport à ce cercle permet d'écrire $\overline{FH}\cdot\overline{FK} = \overline{OF}^2 - \overline{OH}^2$ et puisque les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{F'H'}$ sont symétriques par rapport à O, on a :

$$\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = -\overline{FH}\cdot\overline{FK} = \overline{OH}^2 - c^2.$$

Pour que la droite Δ soit tangente à l'ellipse il faut et il suffit que le point H appartienne au cercle principal O (*a*) donc que l'on ait OH = *a*.

C'est-à-dire, d'après la relation précédente : $\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = a^2 - c^2$ ou :

$$\boxed{\overline{FH}\cdot\overline{F'H'} = b^2}$$

Pour qu'une droite soit tangente à une ellipse, il faut et il suffit que le produit algébrique des distances des foyers à cette droite soit égal au carré du demi petit-axe de cette ellipse.

• **434. Générations tangentielles de l'ellipse.** — Chacune des trois propriétés caractéristiques précédentes permet de reconnaître que l'enveloppe d'une droite variable est une ellipse :

1° *L'enveloppe de la médiatrice d'un segment joignant un point variable d'un cercle donné* F′ *à un point fixe intérieur* F *est une ellipse.*