On désigne par b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
1) Comparez les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$x \mapsto x+1 \ ; \ x \mapsto 2x+1 \ ; \ x \mapsto e^x$$

2) Dans une urne contenant un jeton rouge et un jeton vert, on va effectuer des tirages de la manière suivante :
Tant qu'on obtient des jetons verts, on replace le jeton vert obtenu dans l'urne, puis on multiplie par b le nombre de jetons verts alors contenus dans l'urne (à l'aide d'un stock annexe de jetons verts), puis on procède au tirage suivant.
Dès que l'on obtient le jeton rouge, l'expérience s'arrête.
On note X_b la variable aléatoire définie par :
$(X_b = 0)$ est l'évènement : "l'expérience ne s'arrête pas"
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_b = n)$ est l'évènement : "l'expérience s'arrête à l'issue du $n^{ième}$ tirage".
a) Déterminer $P(X_b = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par u_n la probabilité de l'évènement : "au bout de $n$tirages, l'expérience n'est pas achevée".
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite $V(b)$ est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

c) i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que :

$$u_n - V(b) \leq \frac{1}{b^{n-1}(b-1)}$$

On pourra commencer à s'intéresser à $\frac{u_n}{u_{n+p}}$, $p \in \mathbb{N}$.
ii) Démontrer que la suite $(V(b))_{n\geq 2}$ admet une limite quand b tend vers $+\infty$.
iii) Que peut-on dire de la probabilité de ne jamais tirer le jeton rouge ?