École polytechnique (concours de 1924)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 35-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__35_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (CONCOURS DE 1924).

Première composition de Mathématiques.

I. *Soit la courbe représentée par l'équation*

$$(1) \qquad y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 10)\sqrt{x^2 + 16}},$$

calculer l'aire indéfinie dans les deux sens comprise entre cette courbe et l'axe des x.

II. 1° *Construire la courbe représentant les variations de la fonction*

$$(2) \qquad y = 2x\, e^{\frac{1}{x}} + 4x^3 - 15x^2 + 18x.$$

2° *Trouver un polynome* $P(x)$ *tel que* $y - P(x)$ *tende vers zéro pour* x *croissant indéfiniment.*

3° *Placer la courbe* $y = P(x)$ *sur la figure représentant la courbe définie par l'équation* (2).

Nota. — On ne demande pas de calculer par approximation les coordonnées des points à tangente horizontale.

III. *Développer en série entière en* x *la fonction*

$$y = \operatorname{arc\,tang}(x + 1)$$

et déterminer le rayon de convergence de la série.

Deuxième composition de Mathématiques.

On considère les hyperboles équilatères H *admettant un foyer* F *et telles que les directrices corres-*

pondantes D *passent par un point fixe* O (*le foyer* F *est supposé donné*) :

1° *Démontrer que le point* O *admet la même polaire par rapport à toutes ces hyperboles.*

2° *Par un point* P *du plan il passe deux hyperboles* H *réelles ou imaginaires, construire leurs directrices relatives au foyer* F.

3° *Dans quelle région du plan doit se trouver le point* P *pour que les deux hyperboles* H *qui y passent soient réelles? Cette région est limitée par une conique* Γ. *Trouver la polaire du point* O *par rapport à cette conique.*

4° *Trouver l'enveloppe des hyperboles* H. *En combien de points chaque hyperbole touche-t-elle son enveloppe? Comment sont répartis les points de contact?*

5° *Quel est le lieu que doit décrire le point* P *pour que les directrices* D *des hyperboles* H *passant par ce point fassent entre elles un angle donné* ω? *Démontrer que ce lieu se décompose en coniques et que chacun des points* O *et* F *admet la même polaire par rapport à toutes ces coniques.*

SOLUTION

Par M. A. CLODION.

1° C'est un théorème classique que la polaire du point O par rapport à H est la perpendiculaire menée par le point F à FO. Cette polaire est donc fixe. La condition que H est une hyperbole équilatère n'intervient pas. H pourrait être une conique quelconque de foyer F et de directrice D.

2° Une hyperbole équilatère est une conique d'excentricité égale à $\sqrt{2}$. Donc la directrice d'une hyperbole équilatère H passant en P est à une distance de ce point égale à $\frac{PF}{\sqrt{2}}\cdot$ Elle est donc tangente au cercle C de centre P et de rayon égal à $\frac{PF}{\sqrt{2}}\cdot$ On peut mener par le point O deux tangentes à ce cercle, distinctes et réelles ou imaginaires, ou confondues. A chacune de ces tangentes correspond une H satisfaisante.

3° Pour que H soit réelle, il faut et il suffit que la construction de ces tangentes soit possible, c'est-à-dire que le point O soit extérieur au cercle C, ou encore que l'on ait

$$PO \geqq \frac{PF}{\sqrt{2}}\cdot$$

Considérons le lieu des points tels que l'on ait

$$PO = \frac{PF}{\sqrt{2}}\cdot$$

C'est, comme on le voit, un cercle dont un diamètre est dirigé suivant OF, les extrémités de ce diamètre divisant harmoniquement le segment OF. O est à l'intérieur, F à l'extérieur de G. Si P est à l'extérieur de G, on a

$$PO > \frac{PF}{\sqrt{2}},$$

et H est réelle. Si P est à l'intérieur de G, H est imaginaire.

La polaire du point O, par rapport à G, se confond avec la droite trouvée au 1°.

4° Considérons d'abord deux hyperboles distinctes H et H′, de directrices D et D′. Elles se coupent en quatre points, réels ou imaginaires. Soient M l'un d'eux, I et I′

ses projections sur D et sur D'. On a

$$MI = MI' = \frac{MF}{\sqrt{2}}.$$

Donc le point M est sur l'une des bissectrices de l'angle (D, D'). Réciproquement, les deux bissectrices de cet angle coupent H aux quatre points d'intersection de H et de H'. Si maintenant on fait tendre H' vers H, l'une des bissectrices considérées tend vers D. Elle rencontre H aux points de contact des tangentes issues à cette conique de point F, c'est-à-dire sur les isotropes issues de ce dernier point. Ainsi deux des points caractéristiques de H décrivent les isotropes qui se coupent en F. L'enveloppe comprend donc ces deux isotropes, comme il était évident *a priori*.

La seconde des bissectrices de l'angle (D, D') tend vers la perpendiculaire élevée en O à D. Cette perpendiculaire rencontre H aux deux autres points caractéristiques, dont le lieu constitue la partie intéressante de l'enveloppe.

Soit M l'un d'eux. Sa distance à D est MO. On a donc

$$MO = \frac{MF}{\sqrt{2}}.$$

D'où il résulte que *le lieu de ce point, c'est-à-dire l'enveloppe de* H, *n'est autre que le cercle* G *du* 3°.

5° D'après le 2°, le point P doit être tel que les tangentes issues du point O au cercle de centre P et de rayon $\frac{PF}{\sqrt{2}}$ fassent entre elles l'angle ω ou l'angle $\pi - \omega$ (je suppose l'angle donné ω compris entre O et π). On a donc, soit

$$PO \sin\frac{\omega}{2} = \frac{PF}{\sqrt{2}},$$

soit

$$\text{PO} \sin \frac{\pi - \omega}{2} = \text{PO} \cos \frac{\omega}{2} = \frac{\text{PF}}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\frac{\text{PF}}{\text{PO}} = \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

Le lieu du point P se compose donc, *en général*, de deux cercles.

Par rapport à chacun d'eux, la polaire de chacun des points O et F est la perpendiculaire élevée à OF par l'autre point.

Si $\omega = \frac{\pi}{2}$, les deux cercles se réduisent à la médiatrice de OF.

Remarques. — 1° On reconnaît aisément que, dans une hyperbole équilatère, le centre est le point symétrique d'un foyer par rapport à la directrice correspondante.

D'où l'on conclut que *le lieu des centres des hyperboles* H *est le cercle de centre* O *et de rayon* OF.

On trouvera encore des cercles comme lieux du second foyer, des sommets ou du pied de la seconde directrice de H. Tous ces cercles sont homothétiques et passent par F. On en conclut que *la seconde directrice et l'axe non transverse de* H *passent par des points fixes situés sur* OF.

2° Tous les résultats établis se généralisent immédiatement, en supposant que les H sont des hyperboles semblables à une hyperbole donnée quelconque.

Épure de Géométrie descriptive.

On considère un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz : Ox *étant dirigé en avant,* Oy *vers la droite et* Oz *vers le haut, et la droite* (T) *qui a pour équations*

$$y = a, \qquad x + z = 0.$$

L'axe vertical Oz *tournant autour de* (T) *engendre un hyperboloïde de révolution que l'on coupe par un cylindre de révolution dont l'axe est* Oz, *et le rayon* $2a$, *et on limite la figure par deux plans horizontaux ayant pour équations* $z = \pm 2a$. *On demande de représenter les deux projections du solide compris entre les deux plans horizontaux précédents, à l'intérieur à la fois de l'hyperboloïde et du cylindre.*

On déterminera un point courant de chacune des courbes d'intersection avec sa tangente, ainsi que les points remarquables avec leurs tangentes.

On distinguera les parties vues des parties cachées.

Sur la projection verticale, on couvrira de hachures verticales (ou d'une teinte claire à l'encre de Chine), la partie de la figure où l'on voit la surface du cylindre.

On indiquera sommairement, en marge de l'épure, la méthode employée pour construire les courbes et leurs tangentes, et l'on signalera les particularités qu'on aura remarquées; on pourra aussi donner les équations des courbes qui interviennent dans l'épure.

Disposition des données : $a = 4^{cm}$ *sur la projection verticale, on place* Oz *parallèle aux grands côtés de la feuille, et l'origine des coordonnées à* 8^{cm} *au-dessus du centre de la feuille. Sur la projection horizontale, l'origine sera placée à* 8^{cm} *en avant du centre de la feuille.*