Examen partiel.

Durée : $2h00$, documents et calculatrices interdits !

La qualité et le soin de la rédaction ainsi que la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Enfin, toute démarche sera valorisée ! Bon courage à tous et à toutes !

Vrai ou faux ? Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. On justifiera soigneusement les réponses en donnant une preuve ou en fournissant un contre-exemple.

Affirmation 1 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $z \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : On a : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Affirmation 4 : Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $Re(z) + Re(z') = Re(z + z')$.

Exercice 1. Soit z le nombre complexe tel que $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Quelle est la partie réelle de z ? Quelle est sa partie imaginaire ?

2. Calculer le module de z, noté $|z|$.

3. En déduire la forme trigonométrique de z puis sa forme exponentielle.

Exercice 2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = -2$ et $z_C = -1 + 3i$.

1. Représenter les points A, B et C.

2. Déterminer la nature du triangle ABC .

3. Déterminer l'affixe du point D symétrique du point B par rapport au point A.

4. Déterminer l'affixe du point E tel que $ECAB$ soit un parallélogramme.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

Problème. Les deux premières parties de ce problème consistent à retrouver des résultats du cours **qui sont donc à redémontrer**. Ensuite, la partie III est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Ptolémée pour les nombres complexes et enfin, la partie IV aura pour objectif de prouver cette inégalité de manière géométrique.

Notez bien que la partie III utilise les résultats prouvés aux parties I et II. Toutefois, il est possible d'admettre certaines questions des parties I et II et d'aborder la partie III en supposant connu ce qui précède.

Partie I : Quelques petits résultats préliminaires.

1. Montrer que pour pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z.\overline{z} = |z|^2$.

2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

3. Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}|$.

4. Montrer que pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'}$.

5. En déduire que pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z} - \overline{z'} = \overline{z - z'}$

Partie II : démonstration d'un résultat de cours important : l'inégalité triangulaire.

Dans cette partie, tous les résultats de la partie I peuvent être utilisés.

6. Soient z, $z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $z.\overline{z'} + z'.\overline{z} = 2Re(\overline{z}.z')$.

7. Montrer que pour tout nombre complexe z, $|z| \geq |Re(z)|$.

8. En déduire une démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Indication : on pourra étudier le signe de la différence : $|z + z'|^2 - (|z| + |z'|)^2$.

Partie III : démonstration de l'inégalité de Ptolémée.

Dans cette partie, vous pouvez utiliser les résultats des parties I et II (que vous ayez réussi à les redémontrer ou non) et les autres résultats du cours qui sont supposés connus.

9. Démontrer que pour tous nombres complexes a et $b \in \mathbb{C}^*$,

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a - b|}{|a||b|}.$$

10. Montrer que pour tous x, y, $z \in \mathbb{C}$,

$$|x|.|y-z| \leq |y|.|z-x| + |z|.|x-y|.$$

11. En déduire l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall x, y, z, w \in \mathbb{C}, |x-y|.|z-w| \leq |x-w|.|y-z| + |x-z|.|y-w|.$$

Indication : on pourra remarquer que : $|z-w| = |z-x+x-w|$.

Partie IV : démonstration de l'inégalité de Ptolémée dans le plan complexe.

Dans cette partie, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B, C et D quatre points du plan complexe.

12. En utilisant la partie III, montrer l'inégalité de Ptolémée dans ce cas :

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.AD.$$

** FIN DU SUJET **