30. Soit $f(n)$ le nombre de cases que le cavalier peut atteindre en exactement $n$ mouvements. On a $f(0) = 1$, $f(1) = 8$, $f(2) = 33$. Pour $n = 3$, les cases atteintes remplissent toutes les cases blanches d'un octogone de côté égal à quatre cases blanches. Par récurrence, on peut montrer que, pour $n \geqslant 3$, les cases accessibles sont celles d'un octogone à $(n+1)$ cases de même couleur sur chaque côté. On peut facilement compter le nombre de cases monochromes d'un octogone de cette sorte. On le complète en un carré de $4n + 1$ cases. Il a $[(4n + 1) \pm 1]/2$ cases d'une couleur donnée, le signe $+$ étant pour les $n$ pairs et le signe $-$ étant pour les $n$ impairs. On doit y ajouter

$$4\left((n-1) + (n-3) + \cdots\right) = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n^2 - 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

cases redondantes. Le nombre de cases est donc

$$\frac{(4n+1)^2 + 1}{2} - n^2 = \frac{(4n+1)^2 - 1}{2} - (n^2 - 1) = 7n^2 + 4n + 1.$$

Par suite,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0\,; \\ 8 & \text{pour } n = 1\,; \\ 33 & \text{pour } n = 2\,; \\ 7n^2 + 4n + 1 & \text{pour } n \geqslant 3. \end{cases}$$