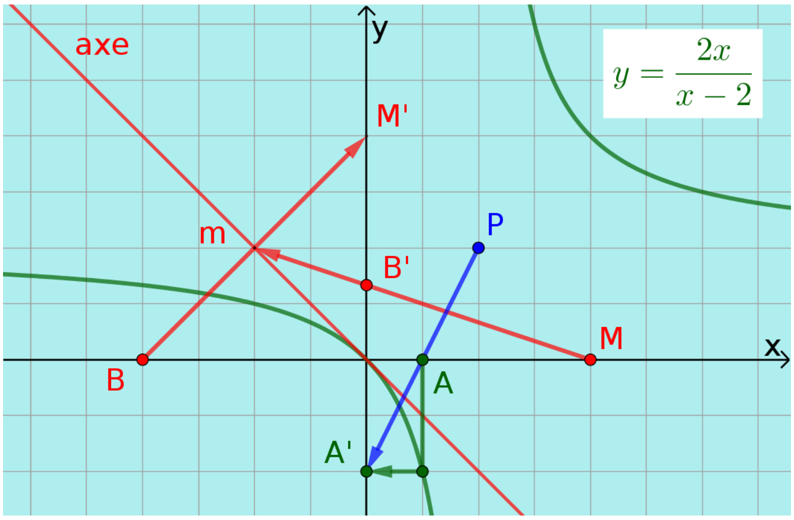
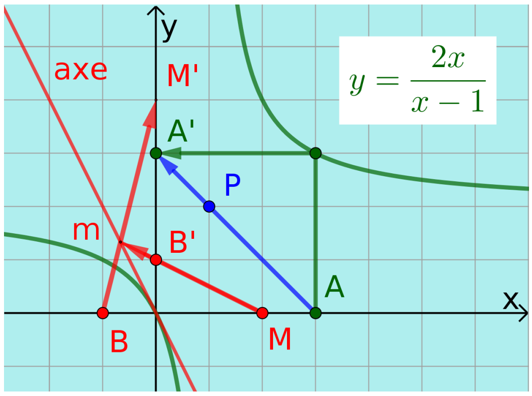
1) Homographie entre droites

a) Perspective

Pour les gens de ma génération, l'homographie était une fonction réelle définie par $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
Avec, de préférence, $c \neq 0$.
Bons petits soldats du repère cartésien, nous n'avions pour but que de construire l'hyperbole verte.
Pour cela, nous nous donnions divers « nombres » A, B, M de la droite (Ox), et nous **calculions** leurs images A', B', M' (à reporter sur la droite (Oy)) à l'aide de la formule de départ.



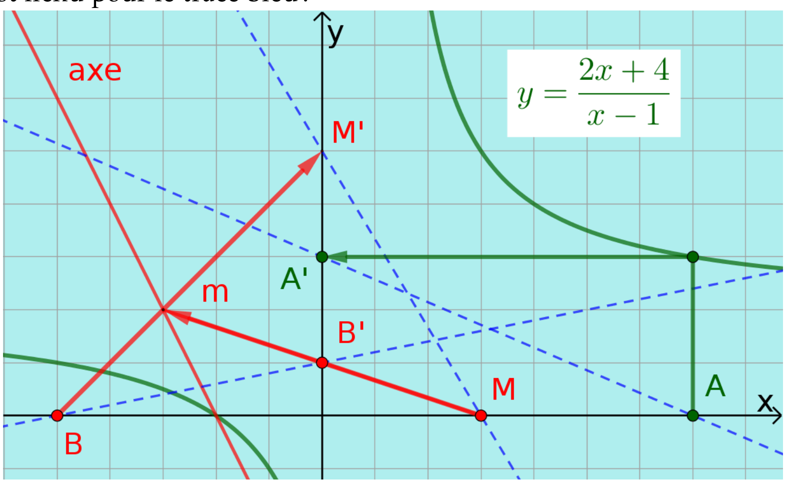


Nous ne nous demandions pas quelles éventuelles propriétés géométriques auraient, aussi bien, donné accès à A', B', M'.

Voici déjà l'accès VIP (Very Immédiate Perspective).
Il s'agit de la construction en bleu.
Si les droites (AA'), (BB'), (MM') sont concourantes en un point P, il paraît que ce sera le cas pour tous les autres points de (Ox) et leurs images sur (Oy). Grâce au quadrillage, constatons que B' aurait effectivement pu être obtenu comme intersection de (PB) avec (Oy), de même que $M' \in (PM) \cap (Oy)$.
On dit que ces homographies f sont des **perspectives** (ou **projections centrales**) de centre P qui appliquent la droite (Ox) sur la droite (Oy).

b) Homographie à axe

Mais, voyons ci-dessous : (AA'), (BB'), (MM') peuvent très bien avoir envie de ne pas concourir !
Alors plus de point P, et c'est fichu pour le tracé bleu !

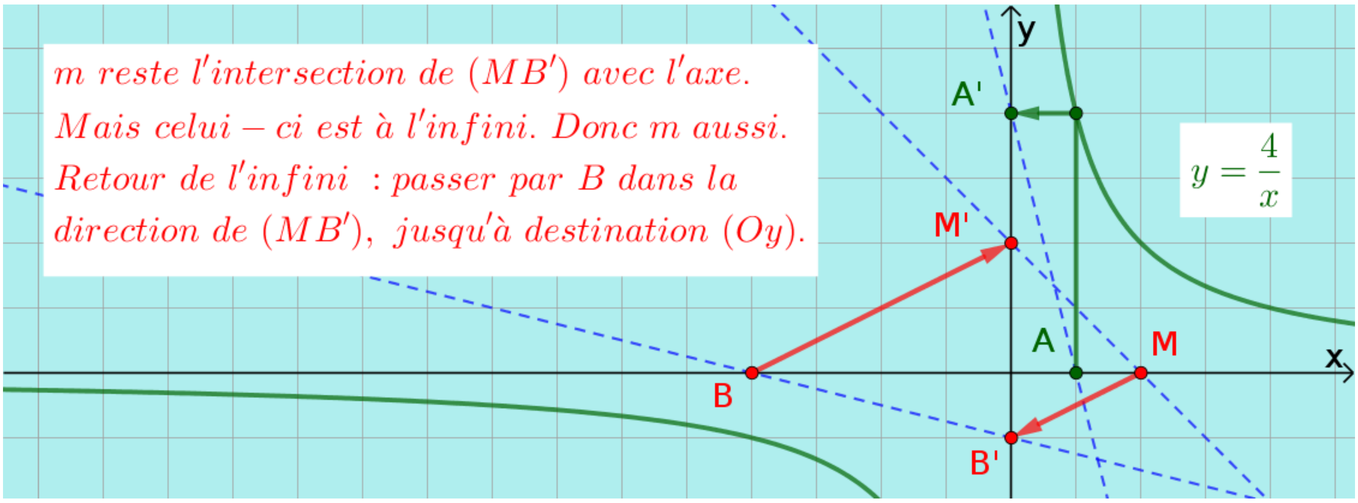


Abolition des privilèges : Accès pour tous.
Pas vaincus, nous sortons du chapeau **l'axe de l'homographie**, et travaillons ~~du chapeau~~ dans le rouge.
Nous disons : « Donne-moi un seul, je dis bien un seul point B et son image B' !
Puis demande-moi de te construire, pour n'importe quel point M de ton choix, l'image M' rien qu'avec la règle ! »

Nous traçons la droite $(B'M)$, puis m son intersection avec l'axe, enfin nous coupons (Bm) avec (Oy) : nous voici arrivés en M' sans le moindre calcul.

La propriété est commune à toutes les homographies, comme on peut le constater sur les deux perspectives du début. Du coup on peut dire que **toute homographie se laisse décomposer en au plus deux perspectives**.
De manière non unique : nous avons appliqué la perspective de centre B' arbitraire (on ne lui demande que d'avoir un antécédent) qui applique (Ox) sur l'axe, puis celle de centre B qui applique l'axe sur (Oy).

Parfois, c'est un peu chaud quand il faut partir à l'infini, mais ça roule.



Si j'essaie de formuler sans prononcer le mot « infini », pour l'instant ça donne ceci.
« En l'absence d'axe, on dirait que les deux projections parallèles successives reviennent à obtenir M' comme projeté de B' sur (Oy) parallèlement à (MB'). »

c) Questions

i) S'il y a ~~Paul~~ **pôle** P, alias centre ou sommet de perspective, aka perspector, exprimer ses coordonnées cartésiennes en fonction de $a,\ b,\ c,\ d$.

ii) Trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence de P, i.e. pour que l'homographie soit une perspective.

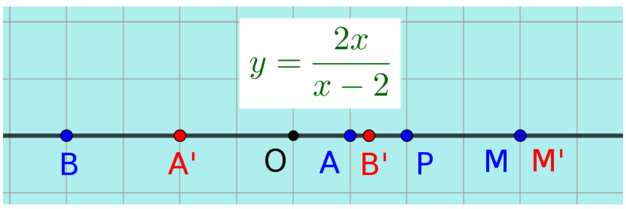
iii) Un peu plus tordu : le fameux axe qui semble exister pour **toutes** les homographies, en donner une équation cartésienne en fonction de $a,\ b,\ c,\ d$.

d) Le birapport

Vous savez qu'à Projectiv' City, $[A,B,C,D] = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ a son étoile de célébrité sur le trottoir.
Je me demande pourtant souvent comment bien le « vendre », i.e. quelles situations le rendent brillant, voire indispensable. Il y en aura peut-être dans ce qui suit...

2) Homographie de la droite projective

Sur notre dessin précédent, on fait chavirer l'axe des y sur l'axe des x.
Adieu provisoire aux courbes représentatives.
Nos points $A,\ B,\ M$ et leurs images $A',\ B',\ M'$ se baladent désormais sur la même droite.



a) Encore le birapport

Sidler page 28. Une **homographie hyperbolique** h (pappus en a parlé récemment : deux points fixes P et Q distincts) admet un birapport $k \neq 0$ tel que, pour tout M de d, on a la relation :

$$[P,Q,M,h(M)] = k.$$

Les quatre exemples qui précèdent ont bien deux points fixes, donc vous pouvez vous entraîner au calcul du birapport. On remarque que les points fixes de la première homographie sont 0 et 4. On écrit donc $[0,4,A,A'] = [0,4,1,-2] = \frac{1-0}{1-4} : \frac{-2-0}{2-4} = \frac{1}{-3} : \frac{-2}{-6} = -1$. Une fois qu'on a contrôlé que $[0,4,A,A'] = [0,4,B,B'] = [0,4,M,M']$, on se dit que le birapport est passé sous les gouttes : il est intrinsec (sic) à h.
(Indication. Les exemples présentent, dans le désordre : deux fois -1, une fois -2 alias $-1/2$, une fois $-3/2$ alias $-2/3$.)

D'autres méthodes.

i) Après quelques cas particuliers, j'ai espéré qu'une formule générale en fonction de $a,\ b,\ c,\ d$ serait sympa.
Hum, on repassera : $k = \dfrac{(a+d+\sqrt{\Delta})^2}{4(ad-bc)}$.
Je crois que ça me montre qu'il y a certainement un « changement de repères de cartes affines » à faire, mais je ne comprends pas encore bien le sens de la notion.

ii) Astuce typiquement projective : puisque le birapport ne dépend pas du point considéré, bien choisir celui-ci : l'antécédent de ∞ permet d'écrire, dans le premier exemple

$$[0,4,2,\infty] = \frac{2-0}{2-4} : \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{-2} : 1 = -1$$

La **valeur interdite** qui se voit réhabilitée en sauveur ... Comme dirait Laplace, elle va doubler la vie des astronomes !

b) Involution

On appelle ainsi toute homographie égale à sa réciproque.

i) Si on dispose de la Green card, on peut regarder si cette hyperbole est symétrique par rapport à la première bissectrice du plan, et dénombrer deux involutions parmi quatre.

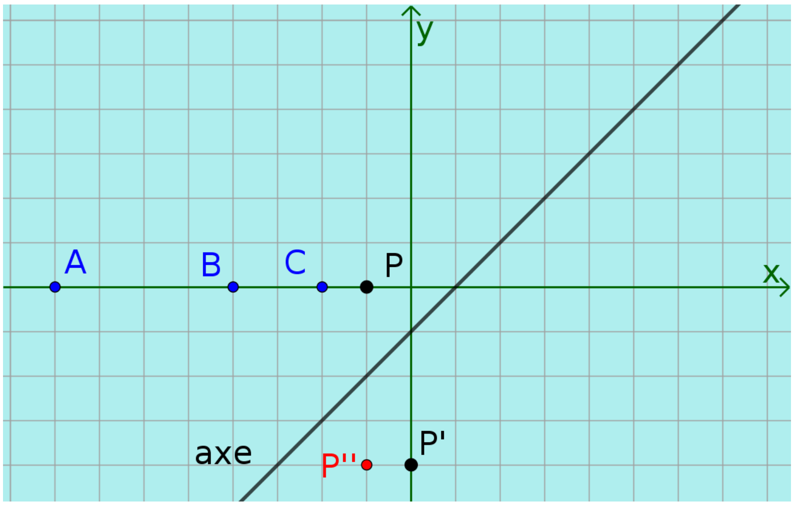
ii) Trouver les conditions à remplir par $a,\ b,\ c,\ d$ pour que l'homographie soit involutive.

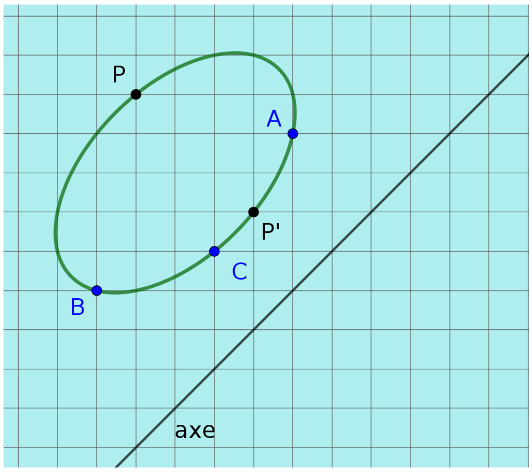
c) Interlude

La fameuse **décomposition d'une homographie en deux perspectives** du (1b) refait parler d'elle.

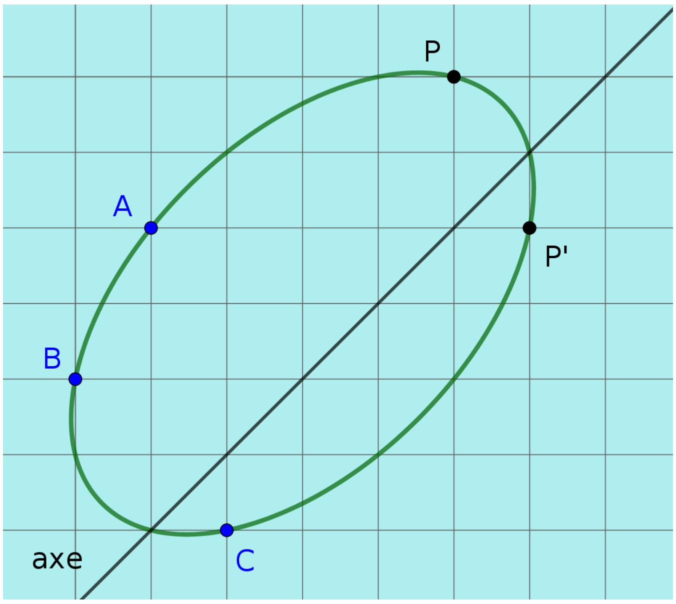
À gauche, c'est un cinquième exemple d'homographie entre les droites (Ox) et (Oy), pour lequel on ne donne qu'un point P, son image P' et l'axe. Quelle est la formule analytique de h ? Autrement dit : après (ou avant si on est très à l'aise) avoir dessiné les points $a,\ b,\ c,\ A',\ B',\ C'$ s'ils existent, voire $A'',\ B'',\ C''$, trouver une formule $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
À droite. Au (2), on a commencé à parler d'homographie de la droite. Je crois bien qu'il y aura aussi homographie d'une conique, aussi je vous invite à tracer $a,\ b,\ c,\ A',\ B',\ C'$: perspective de centre P' de Γ sur l'axe, puis perspective de centre P de l'axe sur Γ.

Le long de cette conique, A' court en criant à A : « Catch me if you can ! »
Qu'en pensez-vous : yes A can, or no A can't ?
La position de l'ellipse par rapport à l'axe joue-t-elle un rôle dans la réponse ?

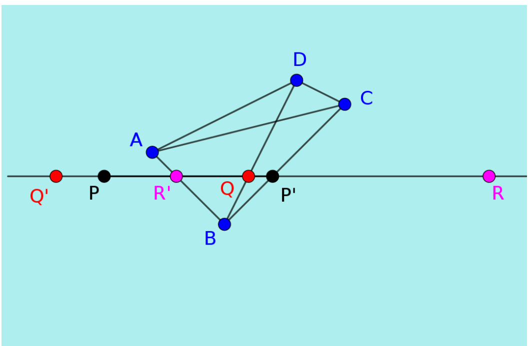


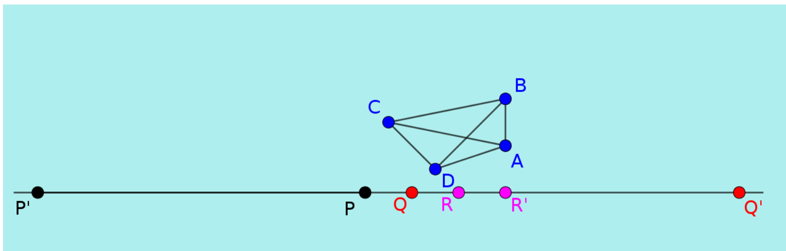


OK, poser la question, c'est déjà vous proposer d'effectuer le tracé de a, b, c, A', B', C' par la composée des perspectives sur l'ellipse suivante, avec la même question sur la poursuite.



d) Involution de la droite, et points fixes
Ne voulant pas quitter le chapitre trop vite, je me suis ~~arraché les cheveux~~ attendri sur le **deuxième théorème de Desargues**.
Sidler page 32. Soit une droite ne passant pas par les sommets d'un quadrangle.
Les côtés opposés du quadrangle coupent alors la droite en des points ... (roulement de tambour)



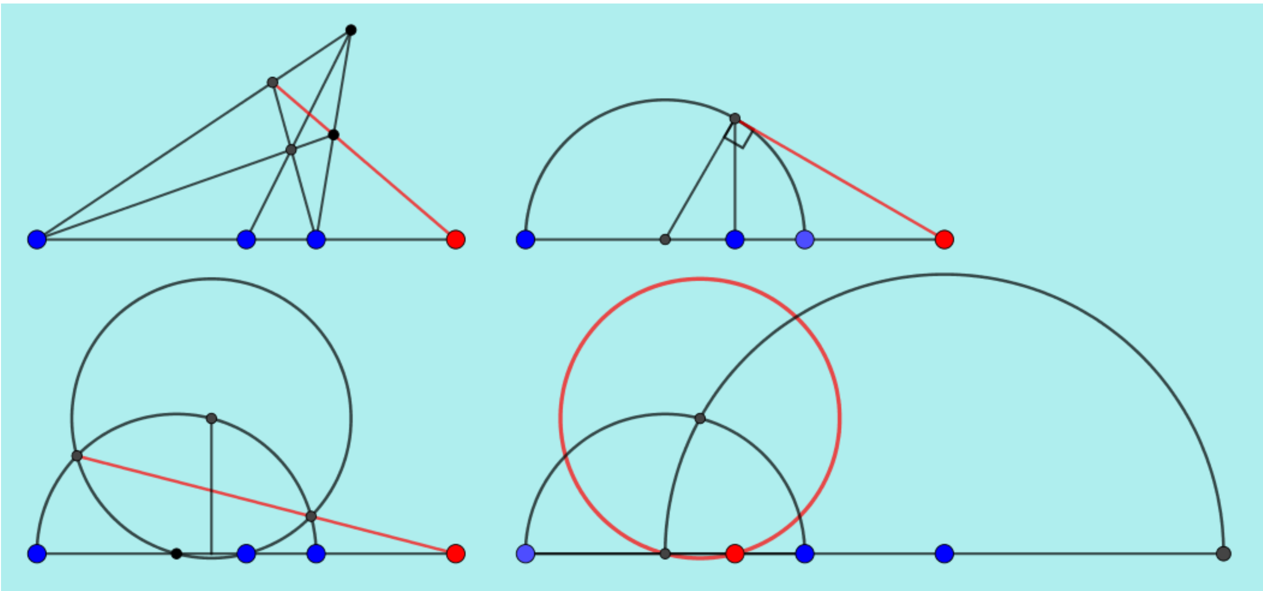


... qui se correspondent dans une même involution.
Le livre propose une première démonstration qu'on qualifiera de non-constructive, puis une qui exhibe une belle décomposition en trois perspectives, que j'ai contrôlée sans avoir le coeur de la reproduire, excité que j'étais à

l'idée de chercher des points fixes.
Autant vous dire tout de suite que, dans un des deux cas, ils existent (répétons qu'on dit alors que l'homographie est hyperbolique, et qu'on peut définir son birapport en mettant comme premiers points ces fixes, et n'importe quel M et $h(M)$ ensuite), dans l'autre non.
Avec ma veine, vous devinez sur quel cas je suis tombé en premier. That's life.

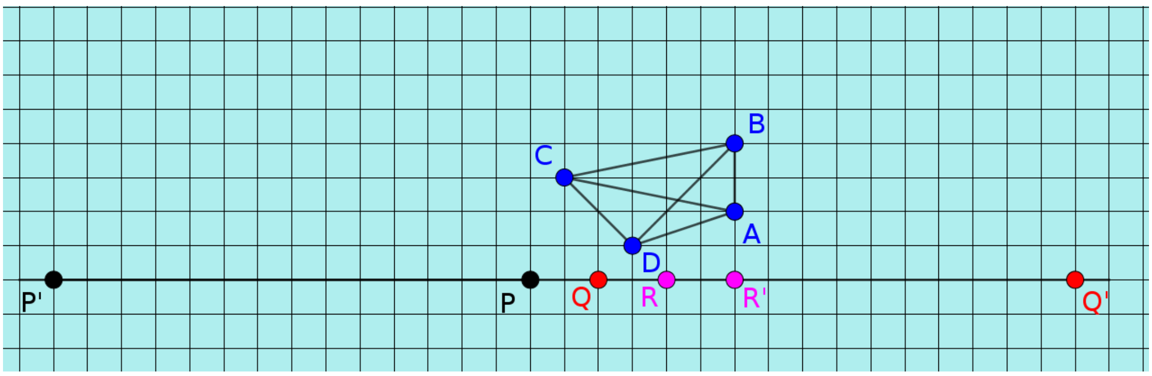
Bref, vous êtes prévenus. Un cas admet bel et bien deux points fixes, et vu qu'on est dans un contexte très « quadrilatère complet » où le birapport devient **harmonique**, i.e. égal à -1, quand vous aurez les points fixes vous direz, blasés, ah oui c'est vrai, $y = \frac{2x}{x-2}$ ou $y = \frac{4}{x}$, ça se prétend varié, mais d'un point de vue construction géométrique, c'est toujours la même chose : une involution de birapport harmonique n'est rien que la **conjugaison harmonique par rapport aux deux points fixes**.

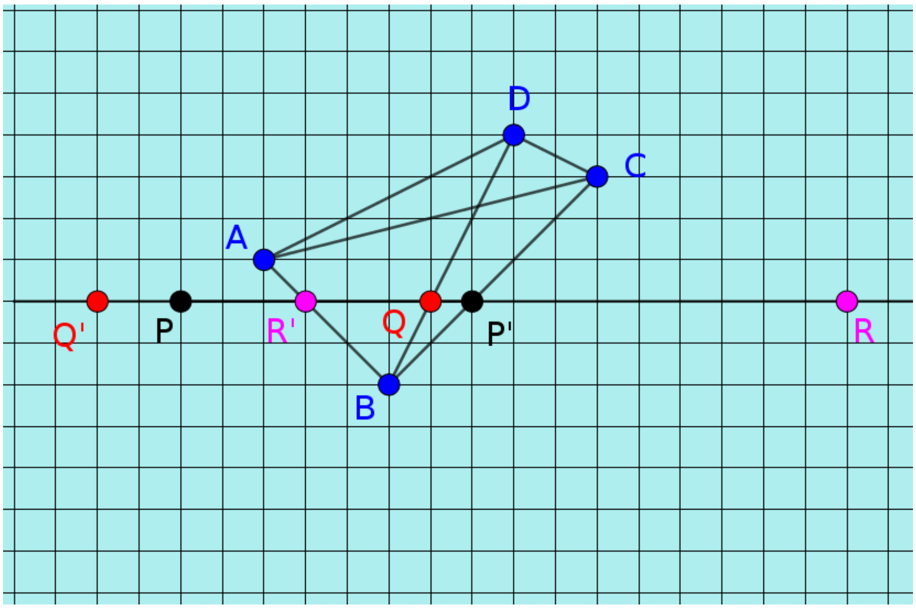
Non, nous ne sommes pas blasés, au contraire nous collectionnons les constructions de ce fameux conjugué harmonique !



1. À la règle seule. 2. Avec la polaire. 3. et 4. À l'aide de l'inversion. (Merci pappus !)

Mais quelle est ta question, finalement ?
Pour chacun des quadrangles ci-dessous (je trouve la recherche plus agréable avec les carreaux), expliciter l'homographie de la droite. Le cas elliptique qui m'a donné tant de mal puisque je cherchais ce qu'il n'a pas (des points fixes), s'est finalement laisser relier à des transformations géométriques autant qu'à une formule $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ des plus simples. L'idée de la question est de tenter de mettre de l'ordre au milieu de ces trois points P, Q, R qui semblent aller dans toutes sortes de directions, et de voir le mouvement d'ensemble.

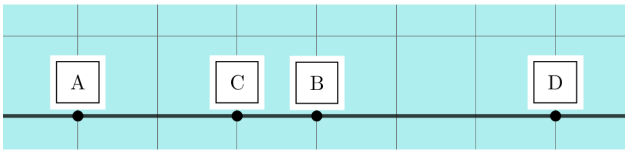




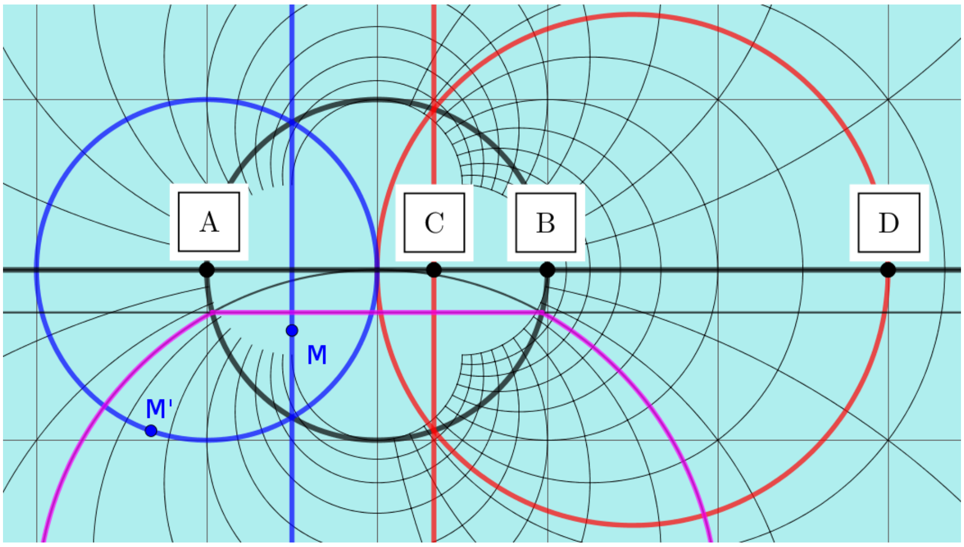
3) La question qui me passionne (J'ai enfin compris que, sans m'en apercevoir, je passe une bonne partie de mon temps dessus.)

   a) Les cas précédents mettent des droites en relation entre elles, ainsi qu'une conique avec elle-même.
   Je crois que je brûle d'envie de tenter une extraction de la dimension un vers la dimension deux au sens suivant : si l'une des homographies fréquentées peut être considérée comme la restriction d'homographies du plan, déterminer au moins une de ces homographies.

   Quand on considère D, le conjugué harmonique de C par rapport $A(-1,0)$ et à $B(1,0)$, on est un peu content d'examiner une **homographie de la droite** des x, homographie qui pourrait s'écrire analytiquement $x_C x_D = 1$. Vérifions le birapport.
   $[A,B,C,D] = [-1,1,x_C,x_D] = \dfrac{x_C+1}{x_C-1} : \dfrac{x_D+1}{x_D-1} = \dfrac{x_C x_D - x_C + x_D - 1}{x_C x_D + x_C - x_D - 1} = \dfrac{-x_C + x_D}{x_C - x_D} = -1.$



   Mais on est très content de se dire qu'il y a, **dans le plan**, au moins une homographie dont la précédente est la restriction à la droite réelle : la célèbre inversion géométrique, de formule $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ et qu'on peut décrire aussi comme **l'inversion du cercle de diamètre** $[AB]$. Elle échange la verticale contenant C et le cercle privé de l'origine et contenant D. Elle échange M et M'. Elle échange le segment magenta contre l'arc de cercle magenta.



b) Page 38, Sidler a listé les homographies d'un plan projectif réel.

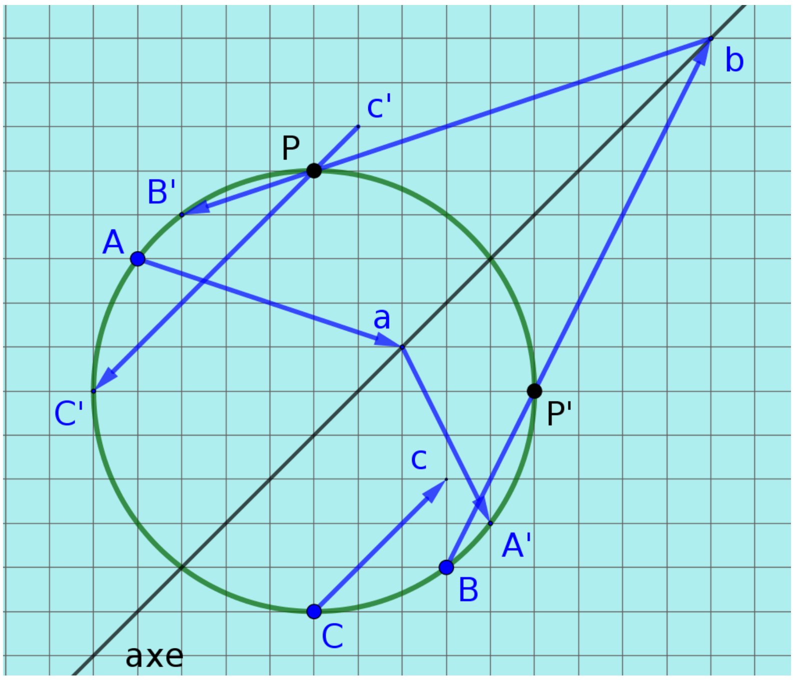
   i) Trois points fixes non alignés. Les droites qui les joignent sont stables. La restriction à chacune de ces droites est hyperbolique.
   ii) Un point fixe et une droite stable ne le contenant pas, et à laquelle la restriction est elliptique.
   iii) Deux points fixes. Deux droites stables : la restriction à l'une est hyperbolique, l'autre elliptique.
   iv) Un point fixe contenu dans une droite stable, où la restriction est parabolique.
   v) Le cas vedette qui, je crois, généralise un peu les involutions : l'homologie. Un point fixe et un axe de points fixes. Si l'axe contient (resp. ne contient pas) le point fixe, **l'homologie** est dite spéciale (resp. générale). À creuser : pour la spéciale, le point fixe est dans un ensemble de ... points fixes. Donc il est « très spécial », où chacun peut faire l'affaire ?

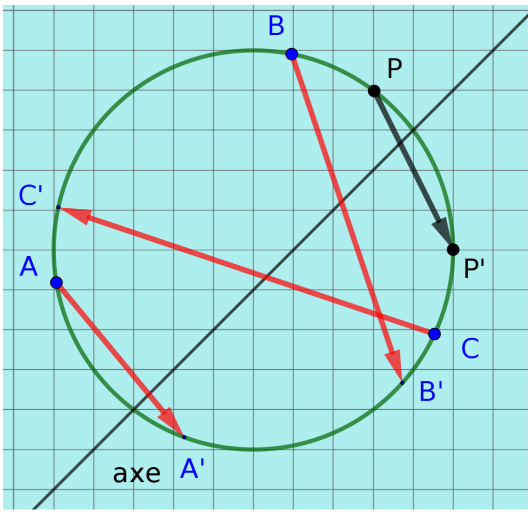
c) Bref, concernant l'ellipse, je crois qu'elle m'a été inspirée par un livre (je ne sais plus lequel) et on peut dire qu'elle illustre le théorème de Pascal qui annonce l'alignement (sur l'axe) des divers points d'intersection. Je rappelle l'involution étudiée. Elle est, pour l'instant, définie avant tout par l'ellipse qui sert d'ensemble de départ et qui est indispensable comme ensemble d'arrivée (sinon on pourrait arriver dans plein d'autres endroits, et je trouve ça bien assez dur actuellement), l'axe, un point P et son image P'.

   Au début, je ne voyais pas de rapport ou de birapport qui, une fois le point sur telle ou telle droite ou courbe, dirait à un moment donné : « Stop, bivouaquons ici, le coin est idéal ».
   Problème : je sèchais quand je cherchais une homographie du plan.

   Pour une version analytique, nous pourrions sûrement choisir huit points et leurs images, écrire un système de huit équations et trouver quatre complexes a, b, c, d réconfortants. Mais pas sûr que je saurais les interpréter géométriquement, et puis pour un cas général, bonjour les dégâts.

   Appelant à l'aide les inversions, et la simplification en travaillant d'abord sur un cercle, je résume où on en est. À droite : pour écarter définitivement l'idée qu'on aurait juste une perspective !





   Tiens, finalement un rayon de soleil ! Aidé par Lebossé-Hémery qui, page 238, me promettait de laisser le cercle globalement invariant si je prenais une inversion échangeant deux points du cercle, j'ai manigancé et presque trouvé mon bonheur.
   Pour info, je n'arrive pas encore à classer cette homographie (si c'en est une !) mais elle a définitivement deux points fixes. Maybe un troisième m'échappe ? Car si elle n'en a que deux, je devrais lui trouver, à part l'axe, une deuxième droite globalement invariante. Peut-être à l'infini ?
   En tout cas, amusez-vous bien !