DÉMONSTRATION DE : $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

---

1. • Montrer que la fonction $\phi(x) = -x\ln x$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$, que l'on notera encore ϕ, et préciser la valeur de $\phi(0)$.

2. • Démontrer que la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\phi(x))^n}{n!}$ converge normalement sur $[0,1]$.

• On admet, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3. • Démontrer : $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

---

1. • On a : $\lim_{x\to 0, x>0} (-x\ln x) = 0$. En conséquence, la fonction :
$\phi(x) = -x\ln x$, prolongée par : $\phi(0) = 0$,
est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

2. • La fonction ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et l'on a : $\phi'(x) = -1 - \ln x$. La fonction ϕ est donc croisssante sur $[0,\frac{1}{e}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{e},+\infty[$. Pour $x \in [0,1]$, on a donc :
$0 \leq \phi(x) \leq \phi(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$, d'où : $0 \leq \frac{(-x\ln x)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}(\frac{1}{e})^n$.

La convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ est donc normale sur $[0,1]$.

3. • De même, la fonction $x \mapsto x^{-x}$ se prolonge par continuité, pour $x = 0$, par : $0^0 = 1$. On a pour $x \geq 0$: $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi(x)^n}{n!}$.

• On en déduit : $\int_0^1 x^{-x}dx = \int_0^1 (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!})dx$, et la convergence normale de la série permet d'affirmer :

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n dx.$$

• Calcul de $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(-\ln x)^n dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule $I_{m,n}$ par IPP : $u = (-\ln x)^n, v' = t^m$, et l'on a : $I_{m,n} = \frac{n}{m+1}I_{m,n-1}$, d'où : $I_{m,n} = \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$, et : $I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

• Autre calcul de $I_n = I_{n,n} = \int_0^1 x^n(-\ln x)^n dx$. Le changement de variable : $t = x^{n+1}$, $dt = (n+1)x^n dx$, conduit à :

$I_n = \int_0^1 (-\ln(t^{1/(n+1)})^n \frac{dt}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_0^1 (-\ln t)^n dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}J_n$.

On calcule $J_n = \int_0^1 (-\ln t)^n dt$ par IPP : $u = (-\ln t)^n, v' = 1$, et l'on a :
$J_n = nJ_{n-1}$. Etc.

• On en déduit : $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} m^{-m}$.

R. C. • 22/11/2007 • ®©