[272] a) Il s'agit essentiellement de montrer que, si f et g appartiennent à E, il en va de même pour $f+g$; or, cela résulte de la majoration de la fonction positive $(f+g)^2 + a(f'+g')^2$ par $2\big(f^2 + af'^2 + g^2 + ag'^2\big)$.
b) Par exemple, l'application qui à $x \in \mathbb{R}^+$ associe $v\mathrm{e}^{-x}$ satisfait à toutes les hypothèses ; ainsi, la question suivante prend un sens.
c) L'hypothèse que les applications $f \in E$ sont de classe C^2 invite à utiliser des techniques variationnelles ; or, ce sera inutile ici.
En effet, remarquons que, si $f \in E$, alors f et f' sont *a fortiori* de carré intégrable et donc ff' est intégrable puisque $|ff'| \leqslant \dfrac{f^2 + f'^2}{2}\cdot$ De ce fait, $f^2(x)$ admet une limite en $+\infty$ du fait que $f^2(x) - f^2(0) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$; en outre, cette limite ne peut qu'être nulle car, sinon, f^2 ne serait pas intégrable.

À présent, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f^2 + af'^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (f + \sqrt{a}f')^2\,\mathrm{d}t - \sqrt{a}\int_0^{+\infty} 2ff'\,\mathrm{d}t$, où la toute dernière intégrale est égale à $-v^2$. Comme il existe une (unique) fonction $f_0 \in E$ solution de l'équation différentielle $\sqrt{a}f' + f = 0$, $f(0) = v$ (c'est en effet $x \geqslant 0 \longmapsto v\mathrm{e}^{-x/\sqrt{a}}$), de tout cela suit que le minimum est égal à $\sqrt{a}v^2$, atteint en la seule fonction f_0.