9.11 Déterminer le polynôme minimal de $\alpha+\beta$ dans les cas suivants :
1) $\alpha=\sqrt{2}$ et $\beta=\sqrt[3]{3}$.
2) $\alpha=i$ et $\beta=j$.
3) α et β sont les racines réelles de x^3+x+1 et x^3+x^2+1 respectivement.

9.12 Soit α un nombre algébrique. Prouver que $A=\{P\in\mathbb{Q}[x]/P(\alpha)=0\}$ est un *idéal* de $\mathbb{Q}[x]$. En déduire que A est principal (voir exercice 6.20) et que $A=\mathbb{Q}[x]P_\alpha$.

9.13 Mesure d'irrationalité de $\sqrt[3]{17}$

1) Avec les notations de l'exercice 8.7, démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N}, |q_n|\leqslant 7(12\sqrt{3}\cdot 5833)^n$.
2) En déduire que, pour tout rationnel p/q vérifiant $q>0$, on a $\left|\sqrt[3]{17}-\dfrac{p}{q}\right|\geqslant\dfrac{5\cdot 10^{-12}}{q^{2.392}}$.

9.14 Mesure d'irrationalité de $\operatorname{Log} 2$

1) Avec les notations de l'exercice 8.8, démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|q_n|\leqslant 36^n$.
2) En déduire que, pour tout rationnel p/q vérifiant $q>0$, on a $\left|\operatorname{Log} 2-\dfrac{p}{q}\right|\geqslant\dfrac{6\cdot 10^{-8}}{q^{13.46}}$.

9.15 Résoudre l'équation diophantienne

$$x^4-5y^4=11.$$

9.16 On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des entiers de la forme 2^a3^b, rangés dans l'ordre croissant. Ainsi $a_0=1, a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=6, a_5=8, a_6=9, a_7=12, a_8=16, a_9=18, a_{10}=24, a_{11}=27, a_{12}=32$. Le but de l'exercice est de démontrer que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=+\infty$.
1) Soient $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ donnés. Prouver que l'équation $ax^3-by^3=c$ n'a qu'un nombre fini de solutions $(x,y)\in\mathbb{N}^2$.
2) Soit $c\in\mathbb{N}$, donné. Prouver que l'équation $a_{n+1}-a_n=c$, d'inconnue n, n'a qu'un nombre fini de solutions.
3) Conclure.

9.17 Une variante du théorème 9.7

On se propose de démontrer le résultat suivant :
Soit α un réel. Soient $k_0>0, \ell_0\geqslant\frac{1}{2}\geqslant\ell_1>0$, $1<E_0\leqslant E_1$ et $Q>1$ des nombres réels tels qu'il existe une suite $(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad |q_n|\leqslant k_0Q^n, \tag{*}$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \ell_1E_1^{-n}\leqslant|q_n\alpha-p_n|\leqslant\ell_0E_0^{-n}. \tag{**}$$