Corrigé 1

1) c) i) N'ayant pas encore rencontré de centre de perspective qui ne soit pas le centre P de l'hyperbole, je dis qu'à l'intersection des asymptotes, nous avons **l'éventuel** centre de la perspective. Il a alors pour coordonnées $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

ii) À vue de nez, il y a pôle si et seulement si $b = 0$.

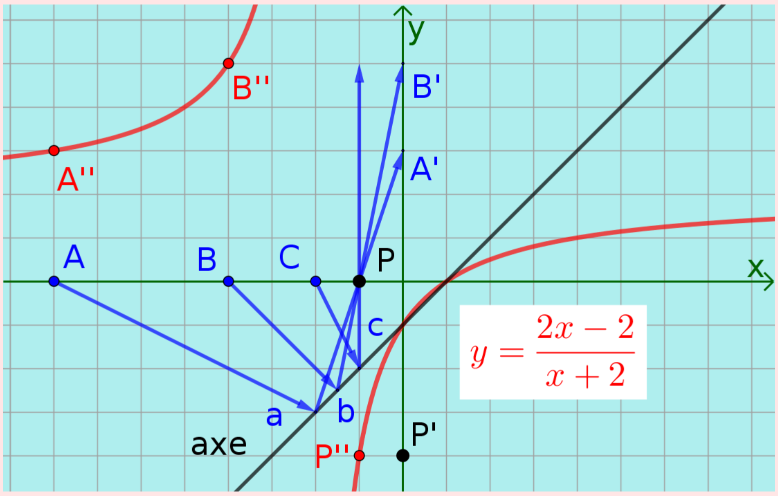
iii) Pour moi, l'axe aurait pour équation $y = \frac{ax+b}{d}$ (tellement voisine de $y = \frac{ax+b}{cx+d}$) si on acceptait de perdre du monde (les axes verticaux, pour lesquels $d = 0$), donc préférons l'équation $dy = ax+b$, ou $ax-dy+b = 0$.

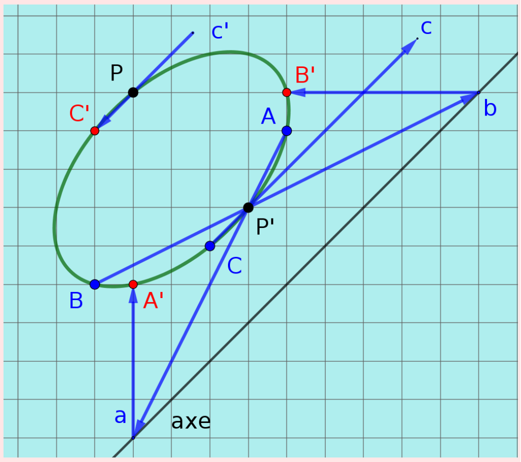
2) b) i) Les cas d'involution ci-dessus sont le premier et le quatrième.

ii) La condition est $a+d = 0$. On peut d'ailleurs donner la forme générale de la réciproque : $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

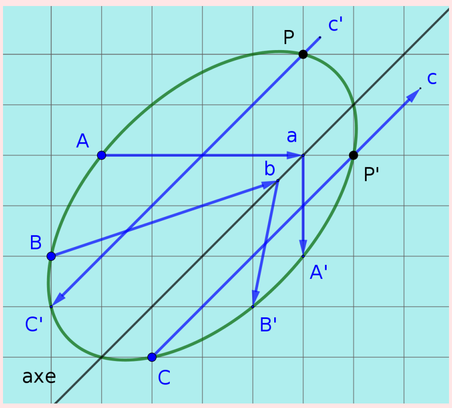
Remarque : puisque l'équation de l'axe devient $ax+ay+b = 0$, on retrouve que le cas particulier $y = \frac{4}{x}$ a du mal avec son axe d'équation $4 = 0$: il est infini comme on a vu. Mais pas « impossible », contrairement au centre d'une homographie non perspective, qui n'existe même pas « à l'infini ». Des droites qui « ne se coupent pas » acceptent de le faire à l'infini, des droites qui « se coupent » ne le referont pas à l'infini, donc P a tenté le coup avec une intersection, et raté les deux autres, ce n'est pas à l'infini que ça s'arrangera.

c)





Il me semble que le long de l'ellipse ci-dessus, que l'axe ne rencontre pas, A ne rattrape jamais A'.
Ci-dessous, ils courent en sens inverse et se croisent aux deux points d'intersection.

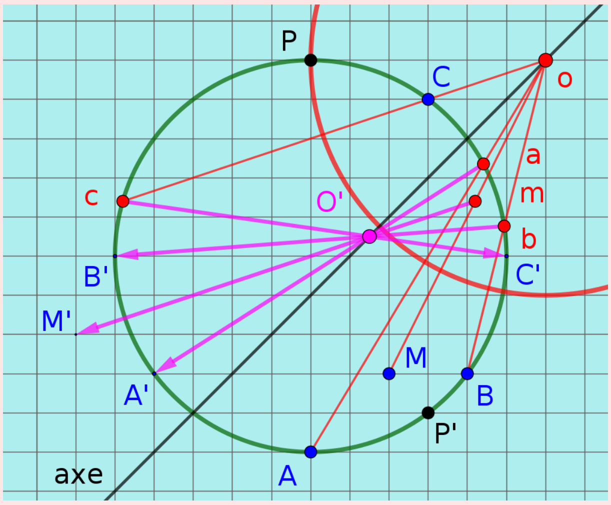


d) Indication. Les cercles de diamètres $[MM']$ nous font la grâce d'appartenir à un faisceau.

i) Quand il est à points- limites, c'est le bonheur involutif : notre bonne vieille conjugaison harmonique par rapport à ces deux points.

ii) Quand il s'agit de cercles sécants, j'imagine qu'il n'y a plus de points fixes, pas terminé.

3) c) Pour décomposer (de manière sûrement non unique) l'homographie qui transforme ce cercle en lui-même étant donné un point P, son image P' et l'axe, mon dessin dit tout. J'ai cherché un cercle d'inversion rouge passant par P et ayant son centre sur l'axe. (À propos de non unicité de la décomposition : déjà ce choix de chercher une inversion est arbitraire, donc laisse la porte ouverte à d'autres idées, j'imagine.) J'ai pu enchaîner en magenta avec une inversion négative de centre l'intersection de (PP') avec l'axe, qui laisse également le cercle vert globalement invariant.



Est-ce que ça règle le cas du cercle ? Geogebra dessine en deux clics l'inverse de n'importe quoi par rapport à un cercle. Mais une inversion négative, ça n'a pas l'air de lui parler.
Je m'en suis sorti avec une pseudo-homothétie. Le fait que le rapport dépende du point n'a pas dérangé ggb.

Tant qu'on reste sur le cercle, cette construction coïncide parfaitement avec l'ancienne (les deux perspectives composées).
M fait l'exercice de la liberté hors du cercle. Lui et moi bichons, pas qu'un peu !
Les inversions étant de signes contraires, on n'est pas étonné que M et M' soient toujours de part et d'autre de la droite des centres d'inversion, qui est l'axe.
Quand on essaie d'appliquer l'ancienne construction (les deux perspectives) à M, je me plaignais d'avance d'avoir un problème de kilométrage dans une direction que j'espérais bonne. Or si on va rebondir en l'ancien $m \in (MP')$ sur l'axe, même la direction délire, $M' \notin (mP)$!

Bon, retrousser les manches pour la même question avec l'ellipse !