E1 1) $v(1) = 0$ $\quad v(2) = 1$ $\quad v(3) = 0$ $\quad v(4) = 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est impair, alors $\frac{n}{2^0}$ est entier et $\frac{n}{2^1}$ ne l'est pas. Ainsi $v(n) = 0$.

Si n est pair, on note $k = v(n) \geq 1$ puisque $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{n}{2^k}$ est entier et $\frac{n}{2^{k+1}}$ ne l'est pas.

On en déduit que $\frac{n/2}{2^{k-1}}$ est entier et que $\frac{n/2}{2^k}$ ne l'est pas. Ainsi

$$v(n/2) = k - 1$$
$$= v(n) - 1$$

ce qui est équivalent à $v(n/2) + 1 = v(n)$.

3) On a

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 + 2v(2) - \frac{1}{1} = 2$$

$$u_3 = 1 + 2v(3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$u_4 = 1 + 2v(4) - \frac{2}{1} = 3$$

$$u_5 = 1 + 2v(5) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$u_6 = 1 + 2v(6) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_7 = 1 + 2v(7) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$u_8 = 1 + 2v(8) - 3 = 4$$

4) On procède par récurrence forte. On note P_n la propriété dans l'énoncé.

<u>Initialisation</u>: On a $u_1 = 1 > 0$, $u_1 \in \mathbb{Q}$,

$u_2 = 2 = u_1 + 1$, $u_3 = \frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_1+1}$.

<u>Hérédité</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_m vraie pour tout $m \in [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$:

- si $n+i$ est pair, on écrit $n+i = 2k$, avec $k \in [\![1, n]\!]$.

On a $u_{n+i} = u_{2k} = u_k + 1 \in \mathbb{Q}$ car $u_k \in \mathbb{Q}$

Par ailleurs, puisque $u_k > 0$, on a $u_{n+i} > 0$.

- si $n+i$ est impair, on écrit $n+i = 2k+1$ avec $k \in [\![1, n]\!]$

On a $u_{n+i} = u_{2k+1} = \frac{u_k}{u_k+1} \in \mathbb{Q}$ car $u_k \in \mathbb{Q}$.

Par ailleurs, puisque $u_k > 0$, on a $u_{n+i} > 0$.

On a donc montré, pour $i = 1$, que $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$ et $u_{n+1} > 0$.

Par ailleurs, en prenant $i = n+1$ on a montré que $u_{2n+1} > 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} &= u_{2n+2} \\ &= 1 + 2v(2n+2) - \frac{1}{u_{2n+1}} \\ &= 3 + 2v(n+1) - \frac{u_n+1}{u_n} \\ &= 1 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n} + 1 \\ &= u_{n+1} + 1 \end{aligned}$$

En particulier, $u_{2n+2} > 0$ et

$$
\begin{aligned}
u_{2(n+1)+1} &= u_{2n+3} \\
&= 1 + v(2n+3) - \frac{1}{u_{2n+2}} \\
&= 1 - \frac{1}{u_{2n+2}} \\
&= 1 - \frac{1}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}+1} \\
&= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi s'achève l'étape d'hérédité.

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Remarque préliminaire : s'il existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{p}{q} = u_n$, alors on a

$$\frac{p}{q} + 1 = u_{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{p}{p+q} = u_{2n+1}.$$

Ainsi il suffit de montrer qu'on peut construire n'importe quel nombre rationnel à partir des termes de la suite que nous connaissons et à partir des opérations

$$\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{q} + 1 \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}.$$

On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

P_n : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut construire le nombre rationnel $\frac{p}{n}$ ".

<u>Initialisation</u> : Puisque $u_1 = 1$, on peut construire tout $p = \frac{p}{1} \in \mathbb{N}$ à partir de l'opération $p \mapsto p+1$. Ainsi P_1 est démontrée.

<u>Hérédité</u> : On suppose P_n vérifiée. Alors on peut construire les rationnels

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n-1}, \quad \frac{3}{n-2}, \quad \dots \quad \frac{n-1}{2}.$$

En appliquant l'opération $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}$ à ces nombres, on obtient les rationnels

$$\frac{1}{n+1}, \quad \frac{2}{n+1}, \quad \frac{3}{n+1}, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{n+1},$$

d'où, en appliquant l'opération $\frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{q}+1$, on obtient tous les rationnels de la forme $\frac{p}{n+1}$. Ainsi $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc exprimer tout $r \in \mathbb{Q}$ sous la forme $r = u_k$.

6) Nous allons montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, si $u_m = u_n$, alors $m = n$. Ceci entraînera que tous les termes de la suite sont distincts et donc par le 5 que tout rationnel est égal à un unique terme de la suite.

Constatons d'abord que les relations

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad , \quad u_n > 0 \\ u_{2n} = u_n + 1 \\ u_{2n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

entraînent que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

- si N est pair alors $u_N > 1$
- si N est impair alors $0 < u_N < 1$

En particulier, si N et M sont de parités différentes, on ne peut pas avoir $u_N = u_M$.

Nous pouvons désormais entamer une récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

P_n : "Si $k \in [\![1, n]\!]$ et $l \in \mathbb{N}$ et que $u_l = u_k$, alors $l = k$."

<u>Initialisation</u>: Soit $k \in [\![1,1]\!]$, c'est-à-dire $k=1$, et soit $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_l = u_1$. Si $l \neq 1$, alors $u_l > 1$ ou $u_l < 1$, ce qui est absurde. Ainsi $l=1$.
Nous avons montré P_1.

<u>Hérédité</u>: Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ et $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_l = u_k$. Si $k < n+1$, alors on a directement $l=k$ par l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer $k = n+1$. Nous avons vu que $n+1$ et l sont forcément de même parité. On considère donc deux cas :

- Si $n+1$ et l sont pairs, écrivons $n+1 = 2N$ et $l = 2L$. On a

$$u_{n+1} = u_l$$

d'où $u_{2N} = u_{2L}$

d'où $u_{N+1} = u_{L+1}$

d'où $u_N = u_L$

et donc $N = L$ puisque $N < n+1$,

ce qui entraîne $2N = 2L$, et donc $n+1 = l$.

Si n et ℓ sont impairs, écrivons $n = 2N+1$ et $\ell = 2L+1$. Alors on a

$$u_{n+1} = u_\ell$$

d'où $$u_{2N+1} = u_{2L+1}$$

d'où $$\frac{u_N}{u_N+1} = \frac{u_L}{u_L+1}$$

d'où $$\frac{u_N+1}{u_N} = \frac{u_L+1}{u_L}$$

d'où $$1 + \frac{1}{u_N} = 1 + \frac{1}{u_L}$$

d'où $$\frac{1}{u_N} = \frac{1}{u_L}$$

d'où $$u_N = u_L$$

d'où $N = L$ puisque $N < n+1$

et donc $2N+1 = 2L+1$, d'où $n+1 = \ell$.

L'étape d'hérédité est terminée.

<u>Conclusion</u>: Par récurrence, on a pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $u_n = u_m \Rightarrow n = m$.