

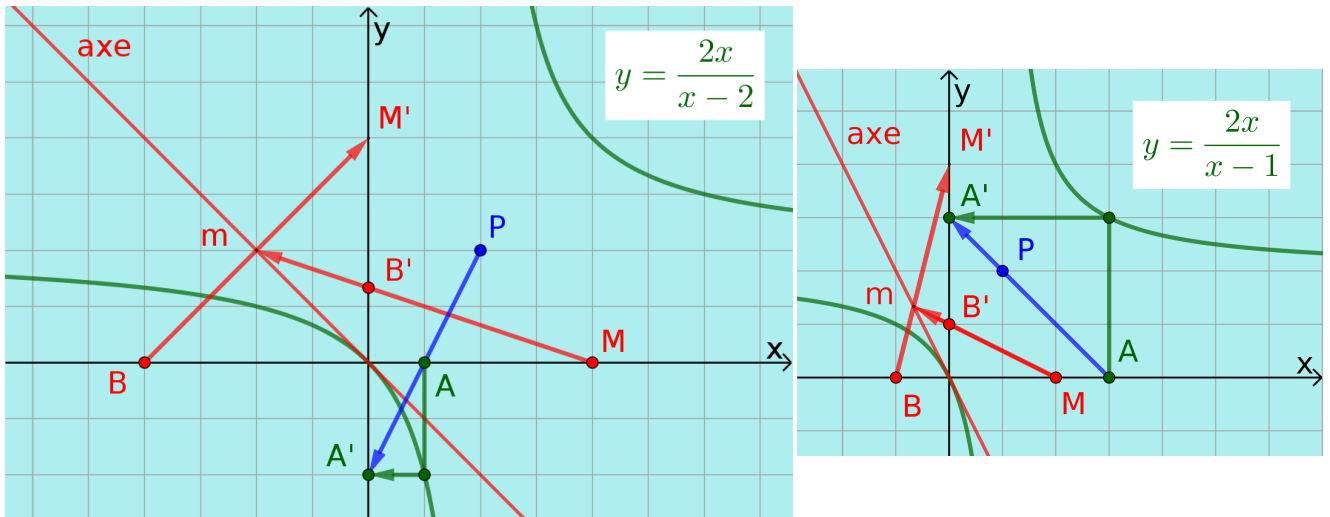
1) Homographie entre droites

a) Perspective

Pour les gens de ma génération, l'homographie était une fonction réelle définie par $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.
Avec, de préférence, $c \neq 0$.

Bons petits soldats du repère cartésien, nous n'avions pour but que de construire l'hyperbole verte.

Pour cela, nous nous donnions divers « nombres » A, B, M de la droite (Ox) , et nous **calculions** leurs images A', B', M' (à reporter sur la droite (Oy)) à l'aide de la formule de départ.



Nous ne nous demandions pas quelles éventuelles propriétés géométriques auraient, aussi bien, donné accès à A', B', M' .

Voici déjà l'accès VIP (Very Immédiate Perspective).

Il s'agit de la construction en bleu.

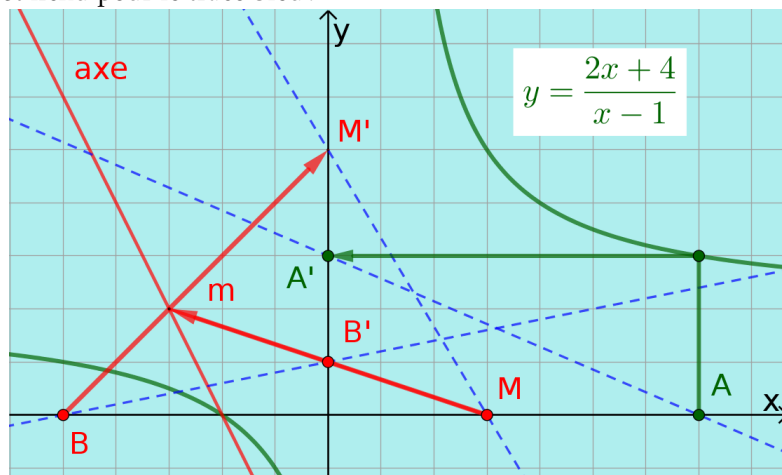
Si les droites $(AA'), (BB'), (MM')$ sont concourantes en un point P , il paraît que ce sera le cas pour tous les autres points de (Ox) et leurs images sur (Oy) . Grâce au quadrillage, constatons que B' aurait effectivement pu être obtenu comme intersection de (PB) avec (Oy) , de même que $M' \in (PM) \cap (Oy)$.

On dit que ces homographies f sont des **perspectives** (ou **projections centrales**) de centre P qui appliquent la droite (Ox) sur la droite (Oy) .

b) Homographie à axe

Mais, voyons ci-dessous : $(AA'), (BB'), (MM')$ peuvent très bien avoir envie de ne pas concourir!

Alors plus de point P , et c'est fichu pour le tracé bleu!



Abolition des privilèges : Accès pour tous.

Pas vaincus, nous sortons du chapeau l'**axe de l'homographie**, et travaillons du chapeau dans le rouge.

Nous disons : « Donne-moi un seul, je dis bien un seul point B et son image B' !

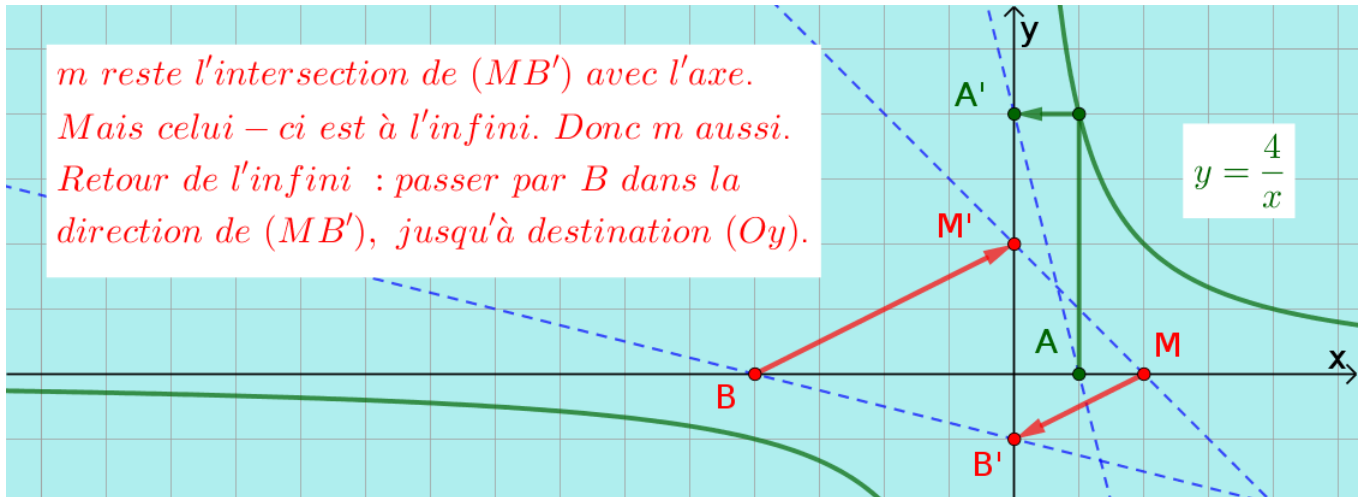
Puis demande-moi de te construire, pour n'importe quel point M de ton choix, l'image M' rien qu'avec la règle! »

Nous traçons la droite $(B'M)$, puis m son intersection avec l'axe, enfin nous coupons (Bm) avec (Oy) : nous voici arrivés en M' sans le moindre calcul.

La propriété est commune à toutes les homographies, comme on peut le constater sur les deux perspectives du début. Du coup on peut dire que **toute homographie se laisse décomposer en au plus deux perspectives**.

De manière non unique : nous avons appliqué la perspective de centre B' arbitraire (on ne lui demande que d'avoir un antécédent) qui applique (Ox) sur l'axe, puis celle de centre B qui applique l'axe sur (Oy) .

Parfois, c'est un peu chaud quand il faut partir à l'infini, mais ça roule.



Si j'essaie de formuler sans prononcer le mot « infini », pour l'instant ça donne ceci.

« En l'absence d'axe, on dirait que les deux projections parallèles successives reviennent à obtenir M' comme projeté de B' sur (Oy) parallèlement à (MB') . »

c) Questions

- i) S'il y a **Paul pôle** P , alias centre ou sommet de perspective, aka perspecteur, exprimer ses coordonnées cartésiennes en fonction de a, b, c, d .
- ii) Trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence de P , i.e. pour que l'homographie soit une perspective.
- iii) Un peu plus tordu : le fameux axe qui semble exister pour **toutes** les homographies, en donner une équation cartésienne en fonction de a, b, c, d .

d) Le birapport

Vous savez qu'à Projectiv' City, $[A, B, C, D] = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ a son étoile de célébrité sur le trottoir.

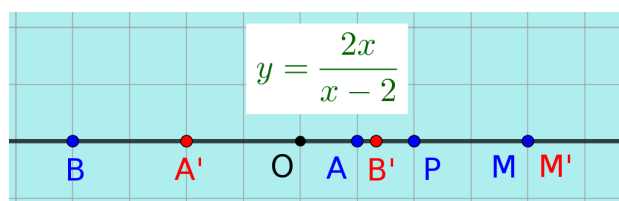
Je me demande pourtant souvent comment bien le « vendre », i.e. quelles situations le rendent brillant, voire indispensable. Il y en aura peut-être dans ce qui suit...

2) Homographie de la droite projective

Sur notre dessin précédent, on fait chavirer l'axe des y sur l'axe des x .

Adieu provisoire aux courbes représentatives.

Nos points A, B, M et leurs images A', B', M' se baladent désormais sur la même droite.



a) Encore le birapport

Sidler page 28. Une **homographie hyperbolique** h (pappus en a parlé récemment : deux points fixes P et Q distincts) admet un birapport $k \neq 0$ tel que, pour tout M de d , on a la relation :

$$[P, Q, M, h(M)] = k.$$

Les quatre exemples qui précèdent ont bien deux points fixes, donc vous pouvez vous entraîner au calcul du birapport. On remarque que les points fixes de la première homographie sont 0 et 4. On écrit donc $[0, 4, A, A'] = [0, 4, 1, -2] = \frac{1-0}{1-4} : \frac{-2-0}{2-4} = \frac{1}{-3} : \frac{-2}{-6} = -1$. Une fois qu'on a contrôlé que $[0, 4, A, A'] = [0, 4, B, B'] = [0, 4, M, M']$, on se dit que le birapport est passé sous les gouttes : il est intrinsec (sic) à h .

(Indication. Les exemples présentent, dans le désordre : deux fois -1 , une fois -2 alias $-1/2$, une fois $-3/2$ alias $-2/3$.)

D'autres méthodes.

- i) Après quelques cas particuliers, j'ai espéré qu'une formule générale en fonction de a, b, c, d serait sympa.

Hum, on repassera : $k = \frac{(a+d+\sqrt{\Delta})^2}{4(ad-bc)}$.

Je crois que ça me montre qu'il y a certainement un « changement de repères de cartes affines » à faire, mais je ne comprends pas encore bien le sens de la notion.

- ii) Astuce typiquement projective : puisque le birapport ne dépend pas du point considéré, bien choisir celui-ci : l'antécédent de ∞ permet d'écrire, dans le premier exemple

$$[0, 4, 2, \infty] = \frac{2-0}{2-4} : \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{-2} : 1 = -1$$

La **valeur interdite** qui se voit réhabilitée en sauveur ... Comme dirait Laplace, elle va doubler la vie des astronomes!

b) Involution

On appelle ainsi toute homographie égale à sa réciproque.

- i) Si on dispose de la Green card, on peut regarder si cette hyperbole est symétrique par rapport à la première bissectrice du plan, et dénombrer deux involutions parmi quatre.
- ii) Trouver les conditions à remplir par a, b, c, d pour que l'homographie soit involutive.

c) Interlude

La fameuse **décomposition d'une homographie en deux perspectives** du (1b) refait parler d'elle.

À gauche, c'est un cinquième exemple d'homographie entre les droites (Ox) et (Oy) , pour lequel on ne donne qu'un point P , son image P' et l'axe. Quelle est la formule analytique de h ? Autrement dit : après (ou avant si on est très à l'aise) avoir dessiné les points a, b, c, A', B', C' s'ils existent, voire A'', B'', C'' , trouver une formule

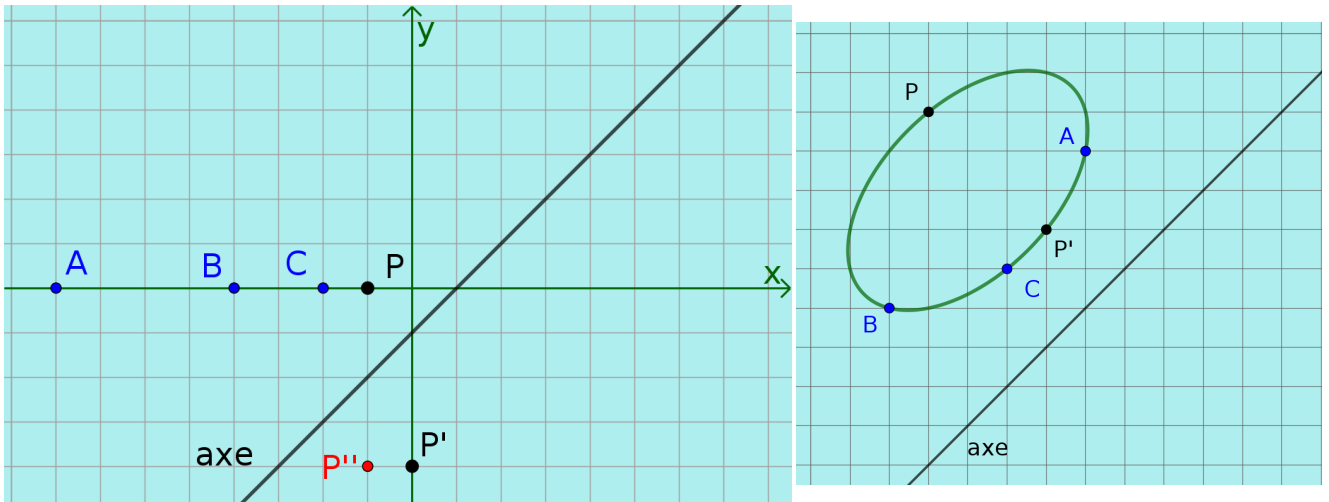
$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

À droite. Au (2), on a commencé à parler d'homographie de la droite. Je crois bien qu'il y aura aussi homographie d'une conique, aussi je vous invite à tracer a, b, c, A', B', C' : perspective de centre P' de Γ sur l'axe, puis perspective de centre P de l'axe sur Γ .

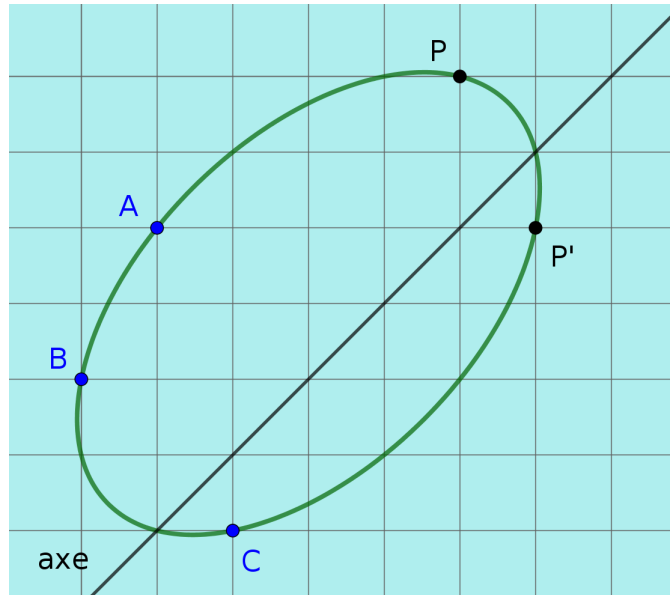
Le long de cette conique, A' court en criant à A : « Catch me if you can ! »

Qu'en pensez-vous : yes A can, or no A can't?

La position de l'ellipse par rapport à l'axe joue-t-elle un rôle dans la réponse?



OK, poser la question, c'est déjà vous proposer d'effectuer le tracé de a, b, c, A', B', C' par la composée des perspectives sur l'ellipse suivante, avec la même question sur la poursuite.

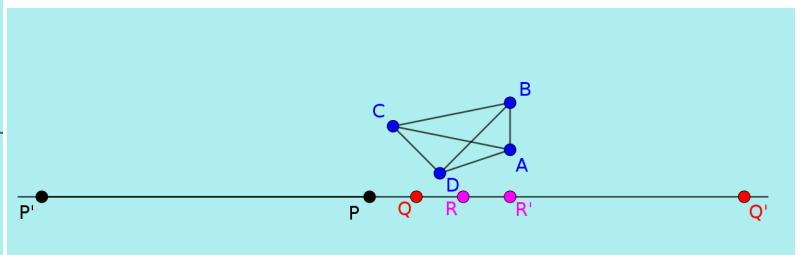
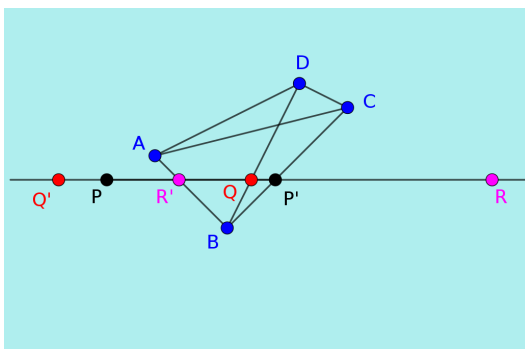


d) Involution de la droite, et points fixes

Ne voulant pas quitter le chapitre trop vite, je me suis ~~arraché les cheveux~~ attendri sur le **deuxième théorème de Desargues**.

Sidler page 32. Soit une droite ne passant pas par les sommets d'un quadrangle.

Les côtés opposés du quadrangle coupent alors la droite en des points ... (roulement de tambour)



... qui se correspondent dans une même involution.

Le livre propose une première démonstration qu'on qualifiera de non-constructive, puis une qui exhibe une belle décomposition en trois perspectives, que j'ai contrôlée sans avoir le coeur de la reproduire, excité que j'étais à

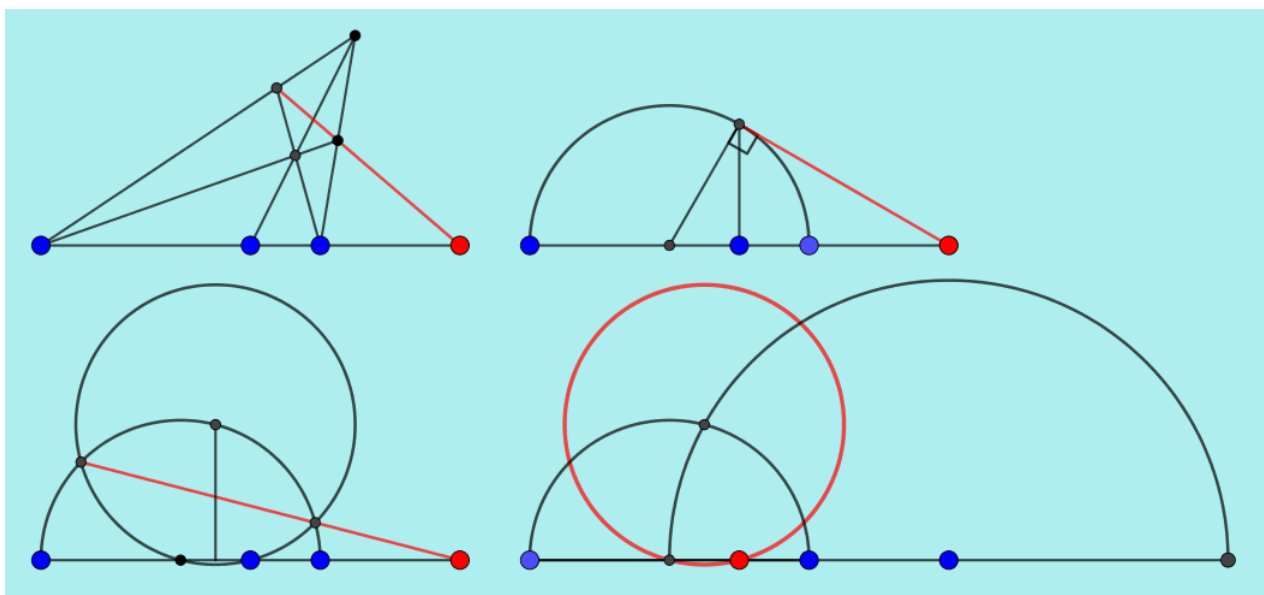
l'idée de chercher des points fixes.

Autant vous dire tout de suite que, dans un des deux cas, ils existent (répétons qu'on dit alors que l'homographie est hyperbolique, et qu'on peut définir son birapport en mettant comme premiers points ces fixes, et n'importe quel M et $h(M)$ ensuite), dans l'autre non.

Avec ma veine, vous devinez sur quel cas je suis tombé en premier. That's life.

Bref, vous êtes prévenus. Un cas admet bel et bien deux points fixes, et vu qu'on est dans un contexte très « quadrilatère complet » où le birapport devient **harmonique**, i.e. égal à -1 , quand vous aurez les points fixes vous direz, blasés, ah oui c'est vrai, $y = \frac{2x}{x-2}$ ou $y = \frac{4}{x}$, ça se prétend varié, mais d'un point de vue construction géométrique, c'est toujours la même chose : une involution de birapport harmonique n'est rien que la **conjugaison harmonique par rapport aux deux points fixes**.

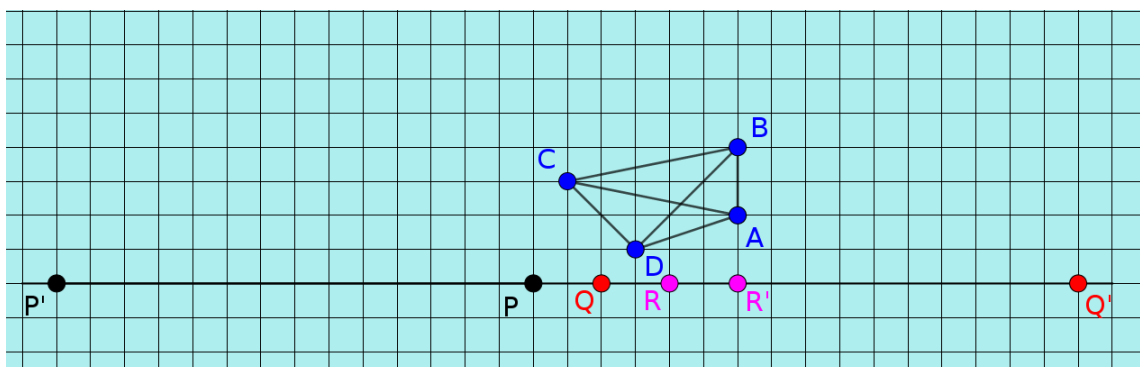
Non, nous ne sommes pas blasés, au contraire nous collectionnons les constructions de ce fameux conjugué harmonique !

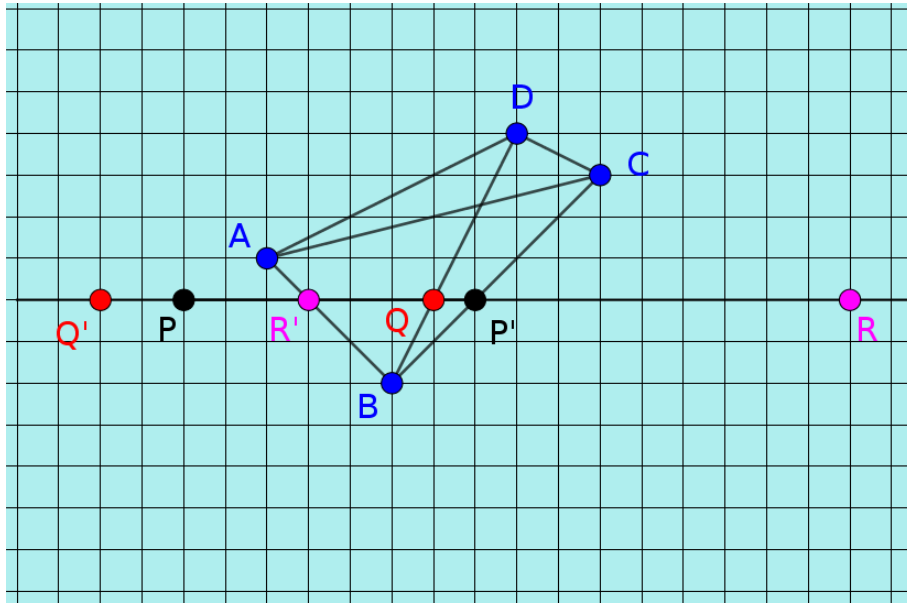


1. À la règle seule. 2. Avec la polaire. 3. et 4. À l'aide de l'inversion. (Merci pappus!)

Mais quelle est ta question, finalement ?

Pour chacun des quadrangles ci-dessous (je trouve la recherche plus agréable avec les carreaux), expliciter l'homographie de la droite. Le cas elliptique qui m'a donné tant de mal puisque je cherchais ce qu'il n'a pas (des points fixes), s'est finalement laisser relier à des transformations géométriques autant qu'à une formule $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ des plus simples. L'idée de la question est de tenter de mettre de l'ordre au milieu de ces trois points P , Q , R qui semblent aller dans toutes sortes de directions, et de voir le mouvement d'ensemble.




Corrigé 1

- 1) c) i) N'ayant pas encore rencontré de centre de perspective qui ne soit pas le centre P de l'hyperbole, je dis qu'à l'intersection des asymptotes, nous avons l'**éventuel** centre de la perspective. Il a alors pour coordonnées $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.
- ii) À vue de nez, il y a pôle si et seulement si $b = 0$.
- iii) Pour moi, l'axe aurait pour équation $y = \frac{ax+b}{d}$ (tellement voisine de $y = \frac{ax+b}{cx+d}$) si on acceptait de perdre du monde (les axes verticaux, pour lesquels $d = 0$), donc préférons l'équation $dy = ax+b$, ou $ax - dy + b = 0$.
- 2) b) i) Les cas d'involution ci-dessus sont le premier et le quatrième.
- ii) La condition est $a + d = 0$. On peut d'ailleurs donner la forme générale de la réciproque : $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

Remarque : puisque l'équation de l'axe devient $ax + ay + b = 0$, on retrouve que le cas particulier $y = \frac{4}{x}$ a du mal avec son axe d'équation $4 = 0$: il est infini comme on a vu. Mais pas « impossible », contrairement au centre d'une homographie non perspective, qui n'existe même pas « à l'infini ». Des droites qui « ne se coupent pas » acceptent de le faire à l'infini, des droites qui « se coupent » ne le feront pas à l'infini, donc P a tenté le coup avec une intersection, et raté les deux autres, ce n'est pas à l'infini que ça s'arrangera.