On désigne par $E$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et on note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs appartenant à $E$. On désigne par $u$ un vecteur unitaire de $E$ et par $\sigma$ la symétrie qui transforme tout élément $x \in E$ en $\sigma(x) = x - 2(x|u)u$.

Soit $\Omega$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x|\sigma(x)) \leq 0$ et $(x|u) \geq 0$. On désigne par $N$ l'ensemble des endomorphismes $\alpha$ de $E$ tels que $\alpha(\Omega) \subset \Omega$ et par $N_+$ l'ensemble des endomorphismes de la forme $\beta + \gamma$, où $\beta$ et $\gamma$ sont deux éléments de $N$ linéairement indépendants dans l'espace des endomorphismes de $E$. On dira qu'un endomorphisme de $E$ est *extrémal* s'il appartient à $N$ et n'appartient pas à $N_+$.

## I

1°) Comparer $\Omega$ et l'ensemble des éléments $y \in E$ tels que $(y|x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

2°) Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang $\leq 1$.

3°) Existe-t-il des endomorphismes extrémaux de rang 2.

4°) L'endomorphisme identité est-il extrémal ?

5°) Soit $\alpha$ un endomorphisme de $E$ tel que $\alpha(\Omega) = \Omega$ et soit $\beta$ un endomorphisme extrémal. Les endomorphismes composés $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \alpha$ sont-ils extrémaux ? l'endomorphisme $\alpha$ est-il extrémal ?

## II

1°) Soit $y$ un élément de $E$ non nul et soit $m = (y|\sigma(y))$. Pour tout nombre réel $t$, on désigne par $\alpha_{t,y}$ l'endomorphisme de $E$ tel que

$$\alpha_{t,y}(x) = x + \left(\int_0^t e^{m\vartheta}\, d\vartheta\right)(x|\sigma(y))y$$

pour tout $x \in E$. Montrer que, quel que soit $t$, $\alpha_{t,y}$ est de rang 3 et calculer l'endomorphisme inverse.

2°) Déterminer les valeurs de $t$ pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N$ ainsi que les valeurs de $t$ pour lesquelles $\alpha_{t,y} \in N_+$.

3°) Montrer que si $\alpha_{t,y} \in N$, alors $\alpha_{t,y}$ est somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux.

4°) Soit $P$ le plan, ensemble des $x \in E$ tels que $(x|u) = 1$, et soit $S$ une ellipse du plan $P$ contenue dans $\Omega$. Montrer que si $S$ n'est pas le cercle de centre $u$ et de rayon 1 du plan $P$, alors il existe un $y \in E$, différent de zéro, et un nombre réel $t$ tel que $\alpha_{t,y} \in N_+$ et $S \subset \alpha_{t,y}(\Omega)$.

## III

1°) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux endomorphismes de $E$ tels que

$$\beta(\Omega) \subset \alpha(\Omega) \subset \Omega$$

Montrer que si $\beta$ est de rang 3 et si $\alpha \in N_+$, alors $\beta \in N_+$.

2°) Déterminer les endomorphismes extrémaux de rang 3 (on utilisera les résultats de II). Le composé de deux endomorphismes extrémaux (de rang quelconque) est-il un endomorphisme extrémal ?

3°) Tout endomorphisme de $E$ appartenant à $N$ est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux ? (on pourra commencer par étudier le cas d'un endomorphisme $\alpha \in N$ de rang 3 tel que l'intersection de $\alpha(\Omega)$ et du plan $P$ défini en II-4) soit un cercle et son intérieur ; on montrera que, dans ce cas, il existe un $z \in \Omega$ tel que $\alpha(\Omega)$ soit l'image de $\Omega$ par l'endomorphisme qui transforme tout $x \in E$ en $x + (x|u)z$).

4°) L'endomorphisme $\gamma$ de $E$ défini par $\gamma(x) = -x + \frac{5}{2}(x|u)u$ est-il la somme d'un nombre fini d'endomorphismes extrémaux de rang 1 ?