1 Méthode générale

Pour montrer une propriété en mathématiques, on suit la plupart du temps le processus suivant :
1) Retranscrire au brouillon l'énoncé en terme de proposition logique.
2) Décomposer la rédaction à partir de la formule logique.
3) Compléter les trous.

L'étape 1 demande de connaître les définitions du cours.
L'étape 2 est automatique une fois les quelques 10 cas de figure retenus.
L'étape 3 est potentiellement la plus complexe, car c'est là qu'il faut éventuellement inventer quelque chose.

Pour l'étape 3, on utilise souvent les hypothèses de l'énoncé, qui s'énoncent en général sous forme de formule logique. Il faut alors savoir comment utiliser lesdites formules.

La section suivante reprend, pour chaque symbole logique, la manière de le montrer et la manière de l'utiliser.

Exemple : L'énoncé donne une fonction $f : E \to F$ et demande de montrer qu'icelle est injective.
La méthode donne donc :
1) La proposition à montrer est : $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
2) En appliquant les automatismes de la section suivante, on écrit :
"Soient $x, y \in E$.
Supposons $f(x) = f(y)$." et on sait qu'il faut désormais montrer $x = y$.
3) Cette étape dépend évidemment de la fonction f donnée par l'énoncé et des hypothèses que l'on a dessus. Cette étape n'est pas automatisable.

2 Boîte à outils pour les différents connecteurs logiques

2.1 La conjonction : $\wedge$

En logique, on note $\wedge$ le connecteur "ET". Par définition, dire que $P \wedge Q$ est vraie signifie que P est vraie et que Q est vraie.

Pour montrer $P \wedge Q$, il faut montrer P et montrer Q.

Lorsqu'on dispose de l'hypothèse $P \wedge Q$, on peut utiliser dans les preuves P et on peut aussi utiliser Q.

2.2 La disjonction : $\vee$

En logique, on note $\vee$ le connecteur "OU".
Par définition, dire que $P \vee Q$ est vraie signifie que P est vraie ou que Q est vraie.
En mathématiques, le "OU" est inclusif, c'est-à-dire que l'on inclut la possibilité $P \wedge Q$ dans la phrase $P \vee Q$. Chez un restaurateur, "fromage ou dessert" signifie que l'on peut prendre un fromage ou un

dessert mais pas les 2. Pour un mathématicien, "fromage ou dessert" signifie que l'on peut prendre un fromage ou un dessert ou les 2.

Pour montrer $P \vee Q$, on fait en général une disjonction de cas. Dans le cas 1, on montre P. Dans le cas 2, on montre Q.

On peut également montrer $\neg P \Rightarrow Q$ (cf la partie sur l'implication et la négation).

Lorsque l'on dispose de l'hypothèse $P \vee Q$, une méthode classique est de faire une disjonction de cas. Dans le premier cas, on suppose P. Dans le second cas, on suppose Q.

2.3 La négation : $\neg$

En logique, on note $\neg$ le connecteur "NON".
Par définition, dire que $\neg P$ est vraie revient à dire que P est fausse. Selon la formule P, il existe diverses manières de démontrer et utiliser $\neg P$ que nous verrons dans quelques paragraphes.

2.4 L'implication : $\Rightarrow$

En logique, on note $\Rightarrow$ l'implication. $P \Rightarrow Q$ est un synonyme de "si P alors Q". On appelle P prémisse ou hypothèse et Q conclusion.
Par définition, $P \Rightarrow Q$ signifie $\neg P \vee Q$. On remarquera notamment que, si la prémisse P est fausse alors l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.
La phrase "Si Paris est la capitale de l'Allemagne alors Berlin est la capitale de l'Allemagne" est donc vraie.

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la phrase $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Elle lui est équivalente. "Si Boris est un chat alors Boris est un mammifère." est ainsi équivalent à "Si Boris n'est pas un mammifère alors Boris n'est pas un chat."

La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la phrase $Q \Rightarrow P$ qui n'a pas du tout la même valeur logique. On fera donc attention de ne pas confondre les phrases "Si Boris est un chat alors Boris est un mammifère." et "Si Boris est un mammifère alors Boris est un chat."

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, il y a 2 méthodes :

Méthode 1 : on écrit "Supposons P."
Ensuite, il faut montrer Q (et on peut pour cela utiliser l'hypothèse P).

Méthode 2 : on passe par la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
On écrit donc "Supposons $\neg Q$" et on montre $\neg P$.

Lorsque l'on dispose de $P \Rightarrow Q$ comme hypothèse, il faut en plus disposer de l'hypothèse P. On peut alors utiliser Q.

2.5 L'équivalence : $\Leftrightarrow$

En logique, on note $\Leftrightarrow$ l'équivalence. $P \Leftrightarrow Q$ est un synonyme de "P si et seulement si Q", que l'on peut abréger en "P ssi Q".

Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on raisonne par double implication.
On montre donc $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

En déroulant, cela veut dire qu'on écrit :
"$\Rightarrow$: Supposons P. [Preuve de Q].
$\Leftarrow$: Supposons Q. [Preuve de P]".

Lorsque l'on dispose de l'hypothèse $P \Leftrightarrow Q$, on peut utiliser $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. Ainsi, si on dispose de l'hypothèse P, on peut obtenir Q et réciproquement.

2.6 Universalité : $\forall$

En logique, on note $\forall$ le quantificateur universel.
Etant donné un ensemble E, la phrase $\forall x \in E, P(x)$ signifie que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout élément x de E.

Pour montrer $\forall x \in E, P(x)$, on écrit "Soit $x \in E$." puis on montre $P(x)$.

Lorsque que l'on dispose de l'hypothèse $\forall x \in E, P(x)$ et d'un élément x de E, on peut obtenir $P(x)$. La difficulté est souvent de trouver les bons éléments x de E auxquels appliquer la propriété $P(x)$.

2.7 Existence : $\exists$

En logique, on note $\exists$ le quantificateur existentiel.
Etant donné un ensemble E, la phrase $\exists x \in E, P(x)$ signifie que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.

Pour montrer $\exists x \in E, P(x)$, il y a un peu de travail au brouillon pour trouver un truc qui convient.

On écrit alors : "Posons $x =$ [truc trouvé au brouillon]".
On vérifie ensuite que x est dans E et que l'on a $P(x)$.

Lorsque l'on dispose de l'hypothèse $\exists x \in E, P(x)$, on écrit, en toutes lettres : "il existe $x \in E$ tel que $P(x)$". L'élément x est alors fixé et on peut utiliser $P(x)$.
ATTENTION : x ne peut pas être choisi, l'existence assure juste qu'on peut trouver un x vérifiant $P(x)$, pas que ce x vaut un nombre donné.

2.8 Retour sur la négation : $\neg$

Il existe plusieurs manières de démontrer $\neg P$, selon la forme de P. De manière générale, $\neg P$ est équivalent à "si P alors FAUX".

On pourra donc écrire "Supposons P." et montrer FAUX, ie aboutir à une contradiction.

Lorsque P est de la forme $\forall x \in E, Q(x)$, on peut remarquer que $\neg P$ est équivalent à $\exists x \in E, \neg Q(x)$. On cherche donc un contre-exemple, à savoir un x dans E ne vérifiant pas Q.

Lorsque P est de la forme, $\exists x \in E, Q(x)$, on peut remarquer que $\neg P$ est équivalent à $\forall x \in E, \neg Q(x)$. On peut donc écrire. "Soit $x \in E$." et montrer $\neg Q(x)$.

Selon les formes de la propriété P, on peut utiliser $\neg P$ de diverses manières, cf les sections précédentes.

3 Entraînement pour utiliser des connecteurs logiques

3.1 Quelques formules logiques

Soient P, Q des propositions.
1) Montrer que $\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$.
2) Montrer que $\neg P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$.
3) Montrer que $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$.

3.2 Jeu avec les quantificateurs

Après les avoir traduits en langage mathématique (grâce à une formule logique), dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux et les démontrer.
1) Tout entier a même parité que son carré.
2) Il existe un réel de carré négatif (rappelons que le français est toujours large).
3) Si un nombre réel x vérifie l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ alors il vaut 1.
4) Un réel est toujours inférieur à son carré.

3.3 Quelques négations

1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2) Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
3) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

3.4 Croissance

1) Ecrire une phrase logique caractérisant la croissance d'une suite u.
2) Ecrire une phrase logique caractérisant la croissance d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3) Montrer, sans utiliser les dérivées, que $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4 Mise au point sur les ensembles

4.1 Ensembles naïfs

De manière naïve, un ensemble est une collection d'objets (traiter formellement la logique et les ensembles demande un bon bagage mathématique, et est donc enseigné en général à BAC+3/BAC+4).

Si E est un ensemble et x un élément de cet ensemble, on note $x \in E$.
Si E, F sont des ensembles, on dit que $F \subset E$ (F est inclus dans E) ssi tous les éléments de F sont des éléments de E, autrement dit $\forall x \in F, x \in E$. On dit également que F est une partie de E.
On peut ainsi considérer l'ensemble des parties de E, défini par $\mathcal{P}(E) \overset{\text{déf}}{=} \{F \mid F \subset E\}$.

Notons que, pour prouver l'égalité de 2 ensembles, on procède quasiment toujours par double inclusion. Ainsi, montrer $E = F$ revient à montrer $E \subset F$ et $F \subset E$.

On peut également effectuer certaines opérations sur les ensembles, notamment l'intersection et l'union.
Si A et B sont des ensembles, on définit ainsi respectivement leur intersection, leur union et le complémentaire par :
$A \cap B \overset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.
$A \cup B \overset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
$A \setminus B \overset{\text{déf}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
On peut enfin parler du produit cartésien de 2 ensembles A et B qui est l'ensemble des couples dont le premier est dans A et le second est dans B : $A \times B \overset{\text{déf}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

4.2 Un peu d'entraînement

Soient A, B, C des ensembles.
1) Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2) Montrer que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3) On suppose ici que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

4.3 Fonctions

Etant donnés deux ensembles E et F, une fonction f de E dans F est une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété suivante : pour tout élément $x \in E$, il existe exactement un élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$.
On peut alors se permettre la notation $y = f(x)$ pour désigner cet unique élément.
On dit alors que y est L'image de x par f (car il y en a exactement une) et que x est UN antécédent de y par f (car ils peuvent être potentiellement plusieurs).

Si $A \subset E$, on peut définir l'ensemble image de A par f qui est l'ensemble des images des éléments de A par f : $f(A) \overset{\text{déf}}{=} \{f(x)\}_{x \in A}$.
La phrase $y \in f(A)$ est donc synonyme de "il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$", ce que l'on utilise à outrance dans les preuves.

Si $B \subset F$, on définit l'ensemble image réciproque de B par f comme l'ensemble des antécédents d'un élément de B par f : $f^{-1}(B) \overset{\text{déf}}{=} \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

La phrase $x \in f^{-1}(B)$ est donc synonyme de $f(x) \in B$, ce que l'on utilise aussi énormément dans les preuves.

4.4 Quelques exos sur les images directes et réciproques

1) Calculer les images directes et réciproques suivantes, où $f : x \mapsto x^2$ désigne la fonction carrée : $\cos(\mathbb{R})$, $\exp^{-1}(\mathbb{R}_+)$, $\ln([2,4])$, $\sin^{-1}(\mathbb{R}_-)$, $f([-2,3])$, $f^{-1}([3,4])$.

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction.
Soient B_1, B_2 des parties de F et A_1, A_2 des parties de E.

2) Montrer que l'image réciproque se comporte bien avec l'union, l'intersection et le complémentaire, ie :
a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

3) Qu'en est-il de l'image directe ? Pour chacune des égalités suivantes, dire si elles sont vraies ou non, et quelles inclusions sont vérifiées.
a) $f(B_1 \cup B_2) = f(B_1) \cup f(B_2)$.
b) $f(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$.
c) $f(B_1 \setminus B_2) = f(B_1) \setminus f(B_2)$.

4.5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

On dit que f est injective ssi tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent dans l'espace de départ : $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

On dit que f est surjective ssi tout élément de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent dans l'espace de départ : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

On dit que f est bijective ssi elle est injective et surjective. Tout élément y de l'espace d'arrivée admet alors exactement un antécédent x dans l'espace de départ. On peut donc se permettre la notation $x = f^{-1}(y)$ et définir la bijection réciproque de f. On la note $f^{-1} : F \to E$.
Attention à bien faire la différence entre la notation f^{-1} pour la bijection réciproque (qui n'a de sens que lorsque f est bijective) et la notation $f^{-1}(B)$ pour l'image réciproque d'un ensemble (qui a un sens pour toute fonction).

4.6 Entraînement sur l'injectivité, la surjectivité et la bijectvité

1) Dire, pour chacune des fonctions suivantes, lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives (on ne demande pas de preuve) : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$.

On note $\circ$ la composition de fonctions. Ainsi, si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des fonctions, $g \circ f : E \to G$ est une fonction telle que $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des fonctions.
a) Montrer que, si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
b) Montrer que, si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.
c) Montrer que, si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi. Quelle est alors sa bijection réciproque ?

3) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ où $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est définie par $\forall x \in E, \mathrm{Id}_E(x) = x$.
a) Montrer que f est injective et que g est surjective.
b) f et g sont-elles toujours bijectives sous ces hypothèses ?

5 Compléments

Nous reprenons ici quelques modes de raisonnement classiques en mathématiques, ainsi que quelques idées reçues de logique.

5.1 Variables liées et variables libres

Les formules logiques fonctionnent souvent comme des programmes informatiques.

Dans la phrase "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$", la lettre x est dite liée ou muette. Cela signifie que l'on peut changer son nom si bon nous semble : la phrase "$\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$" est donc la même.
Au sein de cette phrase, il est clair que la lettre x désigne un réel mais, une fois la phrase terminée, x n'est plus défini. Pour définir une lettre x, il faut écrire en toutes lettres "Soit $x \in \mathbb{R}$." ou "Posons $x = ...$" ou "il existe un réel x tel que" (attention, ces différentes phrases ont des sens bien précis et clairement distincts). La variable x est alors dite libre. Elle est clairement définie, on peut donc l'utiliser.

De même, en programmation, lorsque l'on définit une fonction "def f(x) :", la variable x n'est définie que pour le corps de la fonction. Utiliser x dans un autre programme plus loin et l'ordinateur renverra une erreur. Pour utiliser une variable dans tout un fichier, on peut la définir de manière globale, ce qui revient à lui donner un statut de variable libre.

On fera donc particulièrement attention, en utilisant une variable, à ce que celle-ci ait bien été définie en amont : soit de manière globale pour une variable libre, soit localement via un quantificateur pour une variable muette/liée/quantifiée.
Parmi les opérateurs qui quantifient une variable, on trouvera notamment (liste non exhaustive) $\forall$, $\exists$, lim, $x \mapsto f(x)$, $\sum$, $\prod$, $\int\limits_0^1 f(t)dt$

Enfin, précisons que les notions de variables libres, de variables liées, de changement de nom de variable (α-renommage pour les intimes) ou de substitution sont bien plus vastes et complexes que ce qui a été exposé ici.

5.2 Contraposée

Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$, on peut démontrer sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ qui lui équivalente (exo).

5.3 Raisonnement par l'absurde

Pour prouver une propriété P, on peut utiliser un raisonnement par l'absurde. On écrit pour cela "Supposons par l'absurde $\neg P$." et on cherche à démontrer FAUX, ie à trouver une contradiction.

5.4 Des peurs ancestrales

"Durant des millénaires, les hommes étaient effrayés par le nombre 0. Vers la fin du Moyen-Age, l'humanité a réussi à surmonter cette peur et à utiliser le nombre maudit. Aujourd'hui, zéro apparaît partout, de nombreux enfants comme adultes y sont confrontés tous les jours et cela ne leur procure pas de dommage psychologique particulier. On peut espérer que, d'ici la fin du siècle, il en sera de même avec l'ensemble vide."

De nombreux débutants en mathématiques ont une peur profonde de l'ensemble vide (vidophobie). Cette peur se cache parfois derrière le terme "convention", comme si le vide était un ensemble particulier, qui ne se comporte pas comme les autres, et forçant les gens à apprendre par cœur, pour chaque propriété, ce qu'il en est du comportement du vide, comme si celui-ci n'avait rien à voir avec les autres ensembles.

Le vide est un ensemble comme les autres, il n'y aucune raison de le discriminer, tout comme 0 est un nombre. Il suffit simplement de comprendre 2 propriétés :
"$\forall x \in \varnothing, P(x)$" est toujours vraie.
"$\exists x \in \varnothing, P(x)$" est toujours fausse.
Dès lors, il n'y a plus rien à dire, tout est trivial.

Mais, au fait, pourquoi ces propriétés ? (Evidemment, cela n'a rien à voir avec des conventions).
Ceci vient du fait que le $\forall$ est une conjonction :
$\forall x \in \{1,2,3\}, P(x)$ se traduit par $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$.
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ se traduit par $\bigwedge\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$.
Donc $\forall x \in \varnothing, P(x)$ se traduit par $\bigwedge\limits_{x\in\varnothing} P(x)$.
Et pourquoi une conjonction vide serait-elle équivalente à VRAI ?

Cela vient du fait de la définition des opérateurs itérés.
Prenons le cas de la somme $S = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et regardons-la comme un programme informatique.
On va faire une boucle pour ajouter successivement à S les réels x_1, x_2... x_n.
A combien doit-on initialiser S ? A 0, qui est le neutre de l'addition, ie $\forall x \in \mathbb{R}, x+0=0+x=x$.
Donc, si $n=0$, $S=0$: une somme vide est nulle.

De même, un produit vide vaut 1 (le neutre de la multiplication).
Une conjonction vide vaut VRAI (le neutre de la conjonction).

Une disjonction vide vaut FAUX (le neutre de la disjonction).

Il n'y a donc là ni convention, ni exception, ni sorcière. Il faut simplement comprendre les définitions et les appliquer, en parvenant à surmonter ses peurs les plus tenaces.

5.5 Récurrence

Un théorème fondamental des mathématiques est le théorème de récurrence :

Théorème : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que :
1) $0 \in A$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow n+1 \in A$.
Alors $A = \mathbb{N}$.

Pour rédiger une récurrence, on écrira :
"Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$: [proposition dépendant de n].
Initialisation : [preuve de $H(0)$]
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$.
[preuve de $H(n+1)$].
D'après le théorème de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$".

Le théorème et le format s'adapte évidemment pour $\mathbb{N}^*$, $[\![0, k]\!]$, etc.

On peut également faire des récurrences doubles ou fortes via le théorème de récurrence forte.

Théorème : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ tel que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $(\forall k < n, k \in A)$ alors $n \in A$.
Alors $A = \mathbb{N}$.

5.6 Notion d'existence et d'unicité

On parle souvent en mathématiques de l'existence d'un objet et de son unicité. Ces 2 notions, même si elles sont souvent utilisées ensemble, sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

Dire qu'il y a existence d'un élément de E vérifiant P, c'est dire qu'il y a au moins un élément de E vérifiant la propriété P (il peut y en avoir un, deux, trois, une infinité...).
Dire qu'il y a unicité d'un élément de E vérifiant P, c'est dire qu'il y a au plus un élément de E vérifiant la propriété P (il peut y en avoir un ou zéro).
On remarquera notamment qu'il n'est absolument pas nécessaire d'avoir existence pour avoir unicité.

Si l'existence est souvent difficile à démontrer (voir la section "analyse-synthèse" pour quelques pistes), l'unicité est beaucoup plus simple en général.
Pour démontrer qu'il y a unicité d'un élément de E vérifiant P, on démontre la propriété suivante :
$\forall x, y \in E, P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$.
On écrit donc "Soient $x, y \in E$ tels que $P(x)$ et $P(y)$." puis on prouve $x = y$.

5.7 Analyse-synthèse

Lorsque l'on cherche à démontrer l'ensemble des objets d'un ensemble E vérifiant une propriété P, on peut parfois procéder par analyse-synthèse.
Cette méthode consiste à considérer un objet de E vérifiant la propriété P puis, par des raisonnements mathématiques, à trouver des propriétés de l'objet qui permettent de raffiner la recherche à une certaine classe (phase d'analyse). Une fois cette recherche suffisamment raffinée (les candidats se trouvent dans un ensemble $F \subset E$), on regarde pour chacun des éléments de F s'il vérifie ou non la propriété P (phase de synthèse).
On obtient alors tous les éléments de E vérifiant la propriété P.

Cette méthode permet notamment de résoudre des équations complexes (comme les équations fonctionnelles) ou de faire des preuves d'existence (avec l'unicité en cadeau lorsqu'il n'y a plus qu'un candidat).

Exemple : caractérisation des automorphismes d'extension de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :
1) $\forall z \in \mathbb{R}, f(z) = z$.
2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, f(z + z') = f(z) + f(z')$.
3) $\forall z, z' \in \mathbb{C}, f(zz') = f(z)f(z')$.

Analyse : Soit f une fonction vérifiant 1), 2) et 3).
On remarque que $f(1) = 1$ et on pose $a = f(i)$.
Dès lors $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + ay$.
Donc f est entièrement déterminée par le paramètre $a \in \mathbb{C}$.
De plus, $-1 = f(-1) = f(i^2) = f(i)^2 = a^2$ donc $a^2 = -1$.
Donc $a = \pm i$.
Donc f est l'identité ou la conjugaison.

Synthèse : $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ vérifient toutes les 2 les propriétés 1),2) et 3).

Les fonctions f vérifiant 1), 2) et 3) sont donc l'identité et la conjugaison.

6 Exercices

6.1 Très petit

Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, a \leqslant \varepsilon$.
Montrer que a est négatif.

6.2 Rationnel et irrationnel

Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est toujours irrationnelle. Quid de la somme de 2 irrationnels ?

6.3 Suites

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$.

Soit v la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Conjecturer la valeur de u_n et démontrer cette conjecture.

6.4 Somme nulle de positifs

Montrer qu'une somme de nombres réels positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls.

6.5 Petit jeu avec les fonctions

Soit $f : E \to F$ une fonction.
1) Montrer que f est injective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
2) Montrer que f est surjective ssi $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$

6.6 Des sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6.7 Fonctions paires et impaires

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ssi $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire ssi $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :
1) g est paire.
2) h est impaire.
3) $f = g + h$.

6.8 Un cube

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.
1) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (l'élève joueur essaiera de le faire sans utiliser les dérivées).
2) Donner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3) Montrer que f est bijective. On appelle racine cubique sa bijection réciproque.
4) Montrer que f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6.9 Rangement

Démontrer le principe des tiroirs :
Vous possédez $n+1$ chaussettes à ranger dans n tiroirs. Montrer que dans un tiroir au moins seront rangées au moins 2 chaussettes.

6.10 Lien entre les théorèmes

Démontrer le théorème de récurrence forte à partir du théorème de récurrence.

6.11 Une paramétrisation du cercle unité

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq -1$.
Montrer que $z \in \mathbb{U}$ ssi $\exists x \in \mathbb{R}, z = \frac{1+ix}{1-ix}$.

6.12 Un disque n'est pas un rectangle

On pose $D \overset{\text{déf}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
Montrer que D ne peut pas s'écrire comme un produit cartésien de 2 parties de $\mathbb{R}$.

6.13 Crayons

Voici un exemple de preuve par récurrence, sur des crayons de couleur monochromes.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$: "si on prend n crayons alors ils sont tous de la même couleur".

$H(0)$ est trivialement vraie. (les vidophobes remarqueront que $H(1)$ est également trivialement vraie).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$.
Soit $C_1 ... C_{n+1}$ un ensemble de $n+1$ crayons.
On considère l'ensemble $C_1 ... C_n$: par hypothèse de récurrence, il existe une couleur γ tels que $C_1 ... C_n$ sont de couleur γ.
On considère l'ensemble $C_2 ... C_{n+1}$: par hypothèse de récurrence, il existe une couleur γ' tels que $C_2 ... C_{n+1}$ sont de couleur γ'.
Or C_2 est de couleur γ et de couleur γ'.
Donc $\gamma = \gamma'$.
Donc les crayons $C_1 ... C_{n+1}$ sont tous de couleur γ ce qui conclut l'hérédité et la récurrence.

Le théorème de récurrence nous dit alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$.

Un commentaire ?

6.14 Triplets pythagoriciens

On dit qu'un triplet d'entiers $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ est pythagoricien ssi $a^2+b^2=c^2$.
Montrer qu'un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ est pythagoricien ssi il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $\{a,b\} = \{u^2-v^2, 2uv\}$ et $c = u^2+v^2$.

6.15 Linéarité

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction.
On dit que f est linéaire ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

1) On prend $n = m = 2$. Montrer que les transformations suivantes sont linéaires :
a) une rotation de centre 0.
b) une symétrie axiale d'axe passant par 0 (réflexion).
c) une homothétie de centre 0.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction linéaire.
On pose $\mathrm{Ker}(f) \overset{\text{déf}}{=} f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ et $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf}}{=} f(\mathbb{R}^n)$.

2) Que vaut $f(0)$?
3) Montrer que f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
4) Montrer que f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$.

6.16 Un théorème de Cantor

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.
1) Existe-t-il une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$?

2) Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Indication [1]

1. On pourra considérer une telle surjection f et considérer l'ensemble $A \overset{\text{déf}}{=} \{x_i n E \mid x \notin f(x)\}$