

Table des matières

Introduction	iii
Notations	viii
I Modélisation et Outils Mathématiques	1
1 Modélisation	5
1.1 Cadre physique	5
1.2 Lois de comportement	10
1.3 Lois de contact avec frottement	13
1.4 Lois de contact avec frottement et adhésion	15
1.5 Conditions électriques à la surface de contact	18
2 Outils Mathématiques	23
2.1 Espaces de Sobolev	23
2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	26
2.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution	29
2.4 Compléments divers	31
II Problèmes Elastiques et Electro-élastiques	35
3 Problème élastique avec adhésion et frottement	39
3.1 Formulation du problème	39
3.2 Formulation variationnelle	41
3.3 Démonstration du Théorème 3.1.	45
4 Problème électro-élastique avec frottement	53
4.1 Formulation du problème	53
4.2 Formulation variationnelle	55

4.3	Démonstration du Théorème 4.1.	59
5	Problème électro-élastique avec adhésion et frottement	65
5.1	Formulation du problème	65
5.2	Formulation variationnelle	67
5.3	Démonstration du Théorème 5.1.	69
III	Problèmes Viscoélastiques et Electro-viscoélastiques	73
6	Problème viscoélastique avec adhésion et frottement	77
6.1	Formulation du problème	77
6.2	Formulation variationnelle	78
6.3	Démonstration du Théorème 6.1	82
7	Problème électro-viscoélastique avec frottement	89
7.1	Formulation du problème	89
7.2	Formulation variationnelle	91
7.3	Démonstration du Théorème 7.1.	94
	Bibliographie	101

Introduction

Dans l'industrie comme dans la nature, plusieurs phénomènes fréquents font appel à des processus de contact entre deux corps déformables qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. La littérature d'ingénierie concernant ce thème est vaste à cause de leur importance dans les systèmes structurels et mécaniques ainsi que dans le façonnage et l'extrusion des métaux. En raison de leur complexité inhérente, les phénomènes de contact sont modélisés par des problèmes évolutionnaires non linéaires qui sont difficiles à analyser.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation et l'analyse mathématique des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables et par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du Contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes; voir par exemple [33, 68, 74].

Une littérature technique vaste, principalement dans l'ingénierie et dans la géophysique, couvre le contact avec ou sans frottement. Dans la géophysique, la littérature se concentre sur le mouvement des plaques tectoniques, particulièrement sur les tremblements de terre. Les publications qui traitent des problèmes de contact avec frottement sont très nombreuses, voir à titre d'exemples [2, 3, 5, 7, 19, 20] et aussi [36, 37, 51, 71, 73]. D'autres travaux ont considéré des conditions de contact du type compliance normale avec frottement, comme dans [4, 41, 42, 52, 70]. Le but est de fournir un contexte clair et rigoureux à la construction des modèles mécaniques de contact, la preuve des résultats d'existence et d'unicité et l'établissement de la régularité de la solution. Une fois l'existence, l'unicité et la régularité de la solution sont établies, des questions importantes surgissent, comme l'analyse mathématique des solutions et comment construire des algorithmes fiables et efficaces pour leur simulations numériques, dont les réponses peuvent figurer dans [16, 18, 25, 30, 31].

Les processus d'adhésion sont importants dans plusieurs montages industriels où les parties usuellement non métalliques sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps déformables, quand une colle est ajoutée pour empêcher le mouvement relatif des surfaces, a reçu récemment une attention accrue tant dans

l'ingénierie que dans la littérature mathématique. La modélisation de base peut être trouvée dans [27, 28, 29, 57]. L'analyse des modèles pour le contact adhésif peuvent être trouvée dans [6, 16, 17, 21, 32] et dans les monographies [68, 74]. On a considéré une application de la théorie du contact adhésif dans le domaine médical des membres prothétiques dans [59, 60]; là l'importance de l'adhésion entre l'os implanté et le tissu a été décrite puisque le décollement peut diminuer la capacité des personnes utilisant la prothèse ou la jointure.

L'effet piézoélectrique a été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1819, mais n'a été correctement expliqué qu'en 1880 par les frères Pierre et Jacques Curie (par expérimentation sur le Quartz et le sel de Rochelle). Bien qu'il semble que le premier à avoir observé ce phénomène soit l'abbé René Just Haüy. La loi de comportement de ce type de matériaux a été établie par Lippmann en 1881 en se basant sur des considérations thermodynamiques. Les premiers modèles impliquant l'effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [48, 49, 50, 77, 78, 79] et plus récemment [12, 35, 56, 76]. De nouvelles investigations dans l'étude des problèmes électromécaniques ont été signalées au cours de ces dernières années, citons par exemple [44, 64, 65, 66, 67, 72], et des simulations numériques ont été rajoutées dans [8, 9, 55].

La piézoélectricité peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes électromécaniques qui couplent les champs élastique et électrique. Une déformation mécanique du matériau génère un champ électrique c'est l'effet direct de la piézoélectricité ou *effet capteur*. Réciproquement, l'application d'un champ électrique ou d'une différence de potentiel induit des déformations mécaniques, c'est l'effet inverse de piézoélectricité ou *effet actionneur*.

Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés on trouve les piézocéramiques et les piézopolymères, dont les Zirconates Titanates (PZT) découverts en 1959, et les Poly-Vinyl-DiFluor (PVDF) qui ont été commercialisés en 1987. Ils sont en général de masse négligeable par rapport à la structure à contrôler et peuvent être flexibles dans le cas du PVDF. Il en résulte, un bon rendement de conversion d'énergie électrique en énergie mécanique et donc un rôle actionneur très efficace. D'autres matériaux possédant une propriété piézoélectrique tels que : le quartz (bien que faiblement piézoélectrique); la topaze; la tourmaline; la berlinite (AlPO_4); l'orthophosphate de gallium (GaPO_4); l'arséniat de gallium (GaAsO_4); les céramiques de structure cristalline perovskite ou de structures tungstène-bronze; les polymères à base de fibres de caoutchouc, laine, cheveux, bois et soie.

Ces matériaux ont surtout trouvé des applications dans le contrôle des vibrations dans le domaine de l'automobile (injecteurs à commande piézoélectrique), l'aérospatiale, le contrôle de forme (ailes d'avion, ailes ou objectifs des télescopes), le contrôle en acoustique des nuisances sonores et dans la biomécanique pour la conception de certains organes humains tels que le pancréas, le foie ou le rein. Il existe des matériaux naturels ou synthétiques pouvant être polarisés pour exhiber ces propriétés piézoélectriques, comme la peau et les os. De très nombreux champs d'applications peuvent être trouvés dans la littérature, citons à titre d'exemples :

Capteurs : La particularité de l'effet piézoélectrique est la génération de fortes contraintes pour des petits déplacements. Il est donc un candidat idéal pour les applications basées sur la détection de pression :

- Capteurs de pression, notamment pour l'automobile (pression des pneus) et l'aéronautique (pression dans les tuyères);
- Capteurs sonores (microphones);
- Microbalance piézoélectrique;
- Batteries électroniques (musique).

Actionneurs : Les déplacements très faibles produits par les cristaux piézoélectriques en font des micromanipulateurs idéaux mis à profit dans différentes applications :

- Microscope à balayage;
- Hauts-parleurs;
- Optique adaptative en astronomie;
- Moteurs piézoélectriques (systèmes autofocus d'appareils photographiques, mécanismes de vitre électrique de voiture).

La piézoélectricité est aussi utilisée dans certaines des imprimantes de la marque Epson, rare entreprise à fabriquer des têtes jet d'encre piézoélectriques. Des impulsions électriques font se contracter de fines buses, emplies d'encre, qui expulsent alors de minuscules gouttes d'encre. Ainsi, en horlogerie, le quartz soumis à une charge à une certaine fréquence vibre à la fréquence propre du cristal, qui est utilisé comme référence de pulsation. Enfin, une utilisation tout à fait courante et anodine de la piézoélectricité est celle qui en est faite dans les allume-gaz: la pression exercée sur le manche de l'appareil produit un courant électrique qui se manifeste sous la forme d'étincelles.

Cette thèse représente une contribution à l'analyse de quelques problèmes de contact frottant avec ou sans adhésion entre un corps déformable et une fondation, en tenant compte de l'effet piézoélectrique du matériau. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus statiques et quasistatiques pour des matériaux élastiques, électro-élastiques, viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Les conditions aux limites sont du type compliance normale avec ou sans adhésion. Les lois de frottement utilisés sont des versions statiques ou quasistatiques de la loi de Coulomb avec ou sans adhésion. Les conditions électriques sont introduites dans les cas où la fondation est isolatrice ou conductrice. Notre étude des phénomènes de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Le mémoire est composé de trois parties que nous décrivons brièvement.

Dans la première partie nous introduisons les outils nécessaires pour une bonne compréhension de l'ouvrage. Nous présentons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques utilisés. Ensuite, nous indiquons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées tout au long de la thèse. Enfin, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Dans la deuxième partie de ce mémoire nous étudions trois problèmes de contact impliquant l'adhésion et le frottement, entre un corps élastique ou électro-élastique et une fondation. Le premier chapitre est consacré à l'analyse d'un problème élastique non linéaire de contact avec frottement et adhésion. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, pour lequel nous démontrons qu'il existe une solution faible unique en utilisant des techniques de point fixe et de monotonie. Nous étendons ces résultats dans le troisième chapitre dans le cas où l'effet piézoélectrique du matériau est tenu en compte. Le contenu de ces deux chapitres a fait l'objet de la publication [44]. Tandis que dans le deuxième chapitre, nous considérons un problème électro-élastique avec frottement, pour lequel nous dérivons une formulation variationnelle et établissons un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

Dans la troisième partie, composée de deux chapitres, nous nous intéressons à l'étude d'un problème de contact avec adhésion et frottement entre un corps visco-élastique et un obstacle. Nous obtenons une formulation variationnelle au problème

mécanique et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le modèle mécanique que nous démontrons en utilisant des techniques d'inéquations variationnelles elliptiques et de point fixe. Dans le dernier chapitre, nous proposons l'analyse d'un problème électro-viscoélastique avec frottement. La nouveauté dans ce chapitre, consiste dans le fait que la fondation est électriquement conductive. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique et nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité en utilisant des résultats sur les inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont démontrés dans [45].

Cette thèse de Doctorat en Sciences a été réalisée dans le cadre de l'Accord Programme *Tassili* (HCU05) entre les universités de Sétif, Perpignan, Chambéry et Clermont Ferrand; et dirigé sous le co-encadrement du Professeur Mircea Sofonea de l'université de Perpignan et du Docteur Salah Drabla de l'université de Sétif.

Notations

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2,3$), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω ,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
Γ_i ($i = \overline{1,3}$)	une partie mesurable de la frontière Γ ,
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ($d - 1$) dimensionnelle de Γ_1 ,
ν	la normale unitaire sortante à Γ ,
v_ν, \mathbf{v}_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel \mathbf{v} ,
$\sigma_\nu, \boldsymbol{\sigma}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}$,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables avec support compact contenu dans Ω ,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
\mathcal{H}	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}_s$,
\mathcal{H}_1	l'espace $\left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}) \in H \right\}$,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes:

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X ,
$\ \cdot \ _X$	la norme de X ,
$\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$	la convergence forte de la suite (\mathbf{x}_n) vers l'élément \mathbf{x} dans X ,
$\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$	la convergence faible de la suite (\mathbf{x}_n) vers l'élément \mathbf{x} dans X ,

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$L^p(0, T; H)$	l'espace de Lebesgue,
$\ \cdot \ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev,
$\ \cdot \ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Pour une fonction f , on note par

\dot{f}, \ddot{f}	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps,
$\partial_i f, f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i ,
∇f	le gradient de f ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de f ,
$\text{Div } f$	la divergence de f .

Autres notations

\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
"."	produit scalaire sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
" $ \cdot $ "	norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d ,
\mathbf{I}_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d ,
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ ,
C	une constante générique strictement positive,
p.p.	presque partout.

Première partie

Modélisation et Outils Mathématiques

Partie I

Modélisation et Outils Mathématiques

Dans le souci de rendre cet ouvrage facile à lire, il nous est paru nécessaire de présenter dans la première partie les cadres physiques et fonctionnels dans lesquels on va travailler. Nous précisons d'abord les cadres physiques et les modèles mathématiques correspondants utilisés dans ce mémoire, ensuite nous décrivons les lois de comportement, les conditions de contact et les différentes lois de frottement qui interviennent dans tout le document.

Après un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous introduisons quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles et les espaces liés à l'effet piézoélectrique.

Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution.

Les références bibliographiques seront ultérieurement spécifiées dans chacun des paragraphes suivants.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans cette thèse; il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement élastiques, électro-élastiques, viscoélastiques et électro-viscoélastiques. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement, avec ou sans adhésion.

1.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans ce mémoire sont décrits par les deux cadres physiques suivants :

Cadre physique n° 1. (*Problème mécanique*). Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2,3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes \Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité \mathbf{f}_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 (voir figure. 1.1). Nous supposons que \mathbf{f}_2 et \mathbf{f}_0 varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasistatique. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement avec ou sans adhésion avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 3 et 6 de ce mémoire.

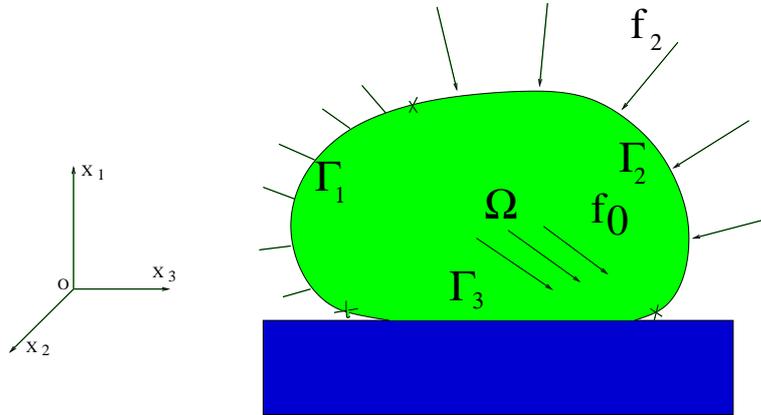


FIG. 1.1 – *Cadre physique n° 1*

Cadre physique n° 2. (*Problème électro-mécanique*). Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2,3$) avec une surface frontière régulière Γ , partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes \Gamma_1 > 0$. On note par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité \mathbf{f}_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité \mathbf{f}_0 (voir Fig. 1.2). Nous supposons que \mathbf{f}_2 et \mathbf{f}_0 varient très lentement par rapport au temps. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

En plus de l'action des forces et des tractions, le corps est soumis à l'action des charges électriques de densité volumique q_0 et des charges électriques de surface. Pour les décrire, nous considérons une deuxième partition de la frontière Γ en trois parties mesurables Γ_a, Γ_b et Γ_3 telles que $mes(\Gamma_a) > 0$. Nous supposons que le corps est en contact frottant avec ou sans adhésion avec une fondation isolatrice (ou conductive) sur Γ_3 , le potentiel électrique s'annule sur Γ_a et une charge électrique superficielle de densité q_2 est prescrite sur Γ_b . La différence par rapport au cadre physique précédent résulte du fait que maintenant nous prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques du corps matériel. Nous étudions l'évolution de ces propriétés dans l'intervalle de temps $[0, T]$ en admettant que le processus est quasistatique, dans l'hypothèse des petites transformations.

Nous utiliserons ce cadre physique dans les chapitres 4, 5 et 7 de ce mémoire.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de

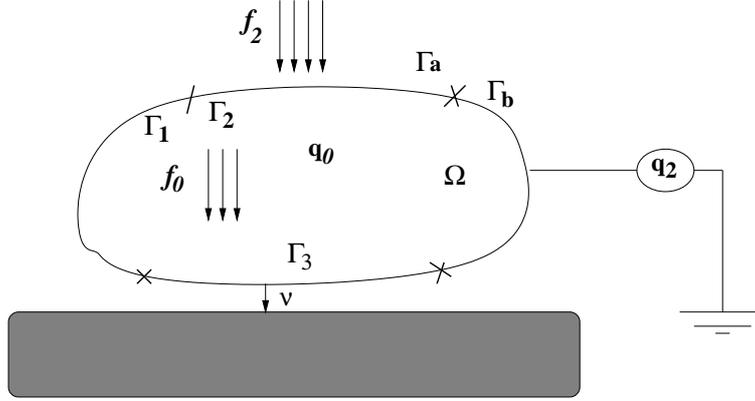


FIG. 1.2 – Cadre physique n° 2

ce mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$); " \cdot " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, & \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\boldsymbol{\tau}\| &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

avec la convention de l'indice muet.

Pour un vecteur \mathbf{v} , nous notons par v_ν et \mathbf{v}_τ les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, définies par

$$(1.1) \quad v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ le champ des *contraintes*, par $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le champ des *déplacements* et par $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ le champ des *déformations infinitésimales*. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ nous dénotons par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ les composantes *normale* et *tangentielle* à la frontière, données par

$$(1.2) \quad \sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(1.3) \quad (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps; par exemple

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$$

où $\dot{\mathbf{u}}$ désigne le *champ des vitesses* et $\ddot{\mathbf{u}}$ désigne le *champ des accélérations*. Pour le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$ les notations \dot{u}_ν et $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ représentent respectivement les vitesses *normale* et *tangentielle* à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau = \dot{\mathbf{u}} - \dot{u}_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$(1.4) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Notons qu'ici et tout au long de la thèse, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

Modèle mathématique n° 1. Le premier modèle mathématique étudié dans ce mémoire, décrit l'évolution du corps dans le *cadre physique n° 1* (page 5). Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$(1.5) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la *densité de masse*; ici "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs, $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.5) s'appelle *processus dynamique*. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{\mathbf{u}}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé. Dans ce cas l'équation (1.5) devient

$$(1.6) \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T).$$

L'équation (1.6) s'appelle *l'équation d'équilibre*. Le processus d'évolution défini par (1.6) s'appelle *processus quasistatique*. Nous rappelons que dans le *cadre physique n° 1*, \mathbf{f}_2 et \mathbf{f}_0 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas *quasistatique* et nous utilisons l'équation (1.6).

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$(1.7) \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T).$$

La condition aux limites en tractions est

$$(1.8) \quad \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T),$$

\mathbf{f}_2 étant une donnée du problème.

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.5)–(1.8) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Modèle mathématique n° 2. Ce modèle mathématique décrit l'évolution du corps dans le *cadre physique n° 2* (page 6). C'est un modèle électro-mécanique qui est plus général que le premier. Les inconnues mécaniques du problème sont le champ des déplacements \mathbf{u} et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ satisfaisant les égalités (1.6)–(1.8). A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacement électrique

$$(1.9) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = q_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T),$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} \mathbf{D} = (D_{i,i})$, et q_0 représente la densité des charges électriques volumiques. Rappelons que dans le *cadre physique n° 2*, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a de la frontière

$$(1.10) \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \times (0, T),$$

tandis que sur Γ_b , une charge électrique de densité q_2 est prescrite,

$$(1.11) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_b \times (0, T).$$

Ce modèle piézoélectrique (1.6)–(1.11) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même : c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement; par exemple, voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ et leurs dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $\boldsymbol{D} = (D_i)$ ainsi que le champ électrique $\boldsymbol{E}(\varphi) = -\nabla \varphi = -(\varphi_{,i})$. Nous présentons par la suite les lois de comportement qui interviennent dans ce mémoire, elles correspondent à quatre catégories particulières de matériaux : matériaux élastiques, matériaux électro-élastiques, matériaux viscoélastiques et matériaux électro-viscoélastiques.

Dans le cas unidimensionnel, on dit qu'un matériau est *élastique* si, lors des essais de charge-décharge les courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident; dans le cas contraire il est *plastique* (*anelastique*) et après décharge complète il subsiste une déformation résiduelle. Enfin, on dit qu'un matériau est *viscoélastique* s'il peut décrire le phénomène de relaxation ou de fluage.

En conclusion, l'analyse des données expérimentales permet d'établir ce qui est propre au matériau lui-même et conduit à l'établissement de la forme des lois de comportement.

Lois de comportement des matériaux élastiques. Nous considérons ici une catégorie de matériaux pour lesquels la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante

$$(1.12) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Ici le tenseur des contraintes est une fonction (linéaire ou non linéaire) du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$; ceci correspond aux matériaux élastiques et la loi de comportement (1.12) s'appelle *loi de comportement élastique*. Dans le cas unidimensionnel la loi (1.12) peut modéliser certaines propriétés mises en évidence par les expériences de chargement-monotone : la linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (selon \mathcal{F} est linéaire ou non linéaire), le durcissement ou l'adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (selon \mathcal{F} est monotone ou non monotone).

Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.12). En effet, plaçons-nous dans le cas unidimensionnel; si par exemple à l'instant $t = 0$ on a $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et nous maintenons la déformation constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0$ il résulte que $\sigma(t) = \mathcal{F}(\varepsilon_0) \quad \forall t > 0$. Par conséquent le modèle (1.12) ne peut pas décrire le phénomène de relaxation mis en évidence par les essais expérimentaux. Un commentaire similaire peut se faire pour le phénomène de fluage. De même, pour l'équation (1.12), dans le cas unidimensionnel, les courbes charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident. Donc, ce modèle ne peut pas décrire les déformations résiduelles.

En général, la fonction \mathcal{F} dépend du point $\mathbf{x} \in \Omega$ (Ω étant le domaine de \mathbb{R}^d occupé par le corps), donc on a

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, t > 0.$$

Si \mathcal{F} ne dépend pas explicitement de \mathbf{x} , le milieu est dit *homogène*, sinon il est dit *non-homogène*.

Nous utiliserons la loi élastique (1.12) dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Lois de comportement des matériaux viscoélastiques. L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques furent introduits. Ils sont utilisés aussi pour décrire le comportement de différents matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Dans le cas unidimensionnel, ces matériaux ont des caractéristiques élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dépend de $\dot{\varepsilon}$. Ce sont donc des *matériaux viscoélastiques*. Dans le cas multidimensionnel la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt s'écrit

$$(1.13) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

où \mathcal{A} représente l'opérateur de *viscosité* et \mathcal{G} est l'opérateur d'*élasticité*. Remarquons que lorsque $\mathcal{A} \equiv \mathbf{0}$, la loi (1.13) se réduit à une loi de comportement élastique de la forme (1.12).

Nous utiliserons la loi viscoélastique dans le sixième chapitre de ce mémoire.

Lois de comportement des matériaux électro-élastiques. Pour modéliser les propriétés électro-élastiques des matériaux, nous considérons une loi de comportement de la forme

$$(1.14) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi), \end{cases}$$

où \mathcal{F} est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\mathcal{B} = (b_{ij})$ est le tenseur de la *permittivité électrique* à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$ où $\nabla\varphi = (\varphi_{,i})$ représente le champ électrique. Par ailleurs $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)$ dénote le transposé du tenseur \mathcal{E} , tel que

$$(1.15) \quad \mathcal{E}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{E}^*\mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d.$$

Nous donnons maintenant un exemple de la loi de comportement électro-élastique non linéaire. Nous prenons dans (1.14)

$$(1.16) \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{A}\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\xi} - P_K\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

où α est une constante strictement positive. $\mathcal{A} : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est un tenseur d'ordre quatre symétrique et défini positif; $K \subset \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé non vide et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K . Ce convexe est défini par $K = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d \mid G(\boldsymbol{\xi}) \leq k\}$ où $G : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et continue telle que $G(\mathbf{0}) = 0$ et $k > 0$.

Pour plus de détails sur les lois de comportement (1.14), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [10, 12].

Nous utiliserons les lois de comportement des matériaux électro-élastiques dans les chapitres 4 et 5 de la deuxième partie de ce mémoire.

Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques. Un matériau est dit électro-viscoélastique s'il possède une loi de comportement de la forme

$$(1.17) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi), \\ \mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}\mathbf{E}(\varphi) \end{cases}$$

dans laquelle l'opérateur \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité à champ électrique nul, \mathcal{G} est l'opérateur d'élasticité pas forcément linéaire à champ électrique nul, $\mathcal{E} = (e_{ijk})$ le tenseur piézoélectrique à champ constant ou nul, $\mathcal{B} = (b_{ij})$ le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle et $\mathbf{E}(\varphi) = -\nabla\varphi$ représente le champ électrique. Remarquons que lorsque $\mathcal{A} \equiv \mathbf{0}$, la loi (1.17) devient une loi de comportement électro-élastique de la forme (1.14).

Un exemple de la loi électro-viscoélastique non linéaire est le suivant

$$(1.18) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi),$$

où \mathcal{A} est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes a_{ijkl} s'appellent "coefficients de viscosité", $K \subset \mathbb{S}^d$ est un convexe fermé non vide et $P_K : \mathbb{S}^d \rightarrow K$ est l'opérateur de projection de \mathbb{S}^d sur K . L'opérateur d'élasticité est donné par

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon} - P_K\boldsymbol{\varepsilon})$$

et \mathcal{E} est un tenseur d'ordre trois. Ses composantes e_{ijk} s'appellent "coefficients piézo-électriques".

Nous utiliserons la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques dans le chapitre 7 de la troisième partie de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ_3 ; c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.3 Lois de contact avec frottement

Par *condition de contact* nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par *loi de frottement* nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ et le déplacement tangentiel \mathbf{u}_τ ou la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$. Notons ici que $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ s'appelle aussi *force de frottement*.

Nous commençons par présenter les conditions aux limites de contact utilisées tout au long de ce mémoire. Dans ce cas, nous nous plaçons dans le *cadre physique n° 1* (page 5). Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times (0, T)$.

Contact avec compliance normale. Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue a priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de *compliance normale*

$$(1.19) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g),$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée *fonction de compliance normale*. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Précisons que dans les chapitres 3, 5 et 6 du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$(1.20) \quad p_\nu(r) = c_\nu r_+$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$(1.21) \quad p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases}$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.19) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, **i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.**

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans ce mémoire.

Loi de frottement de type Coulomb. C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$(1.22) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau, \end{cases}$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans la deuxième partie du mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.22), par la condition de compliance normale (1.19), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$(1.23) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu(u_\nu - g), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu(u_\nu - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda \mathbf{u}_\tau. \end{cases}$$

Dans les chapitres 3, 5 et 6, nous utilisons la loi (1.23) avec le cas particulier $g = 0$ i.e. lorsque l'interstice est nul; ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasistatique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$(1.24) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau(u_\nu - g), \\ \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau(u_\nu - g) \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|}, \end{cases}$$

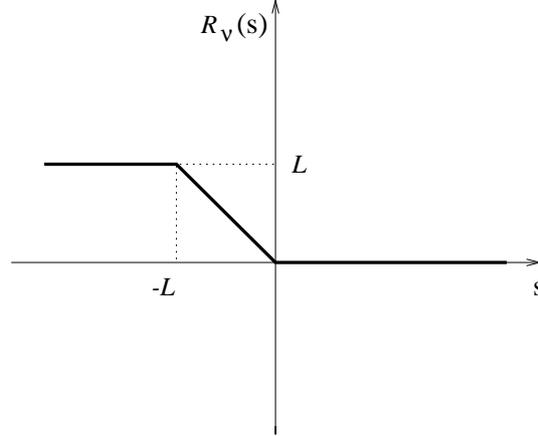
où p_τ est une fonction positive. Dans (1.24), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau(u_\nu - g)$. De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers, par exemple [34, 58].

1.4 Lois de contact avec frottement et adhésion

Dans quelques modèles étudiés, nous supposons que le corps est en contact adhésif avec frottement sur la partie Γ_3 de la frontière avec une fondation. Ceci se traduit par l'introduction d'une nouvelle variable interne de surface, en se basant sur les idées de Frémond [27, 28], appelée champ d'*adhésion* et notée par $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; elle décrit l'intensité des couches actives d'adhésion sur la surface de contact et elle vérifie $0 \leq \beta(t) \leq 1$ sur Γ_3 . Lorsque $\beta(t) = 0$, il n'y a plus d'adhésion, lorsque $\beta(t) = 1$ c'est le cas d'une adhésion complète et il y a lieu à une adhésion partielle quand $0 < \beta(t) < 1$ sur Γ_3 . Pour décrire les conditions aux limites correspondantes, nous supposons que le vecteur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ a une décomposition de la forme

$$(1.25) \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad} + (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc},$$

où $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad}$ et $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc}$ dénotent les parties de $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ associées à l'adhésion et au frottement, respectivement. Nous dénotons par σ_ν , σ_ν^{ad} , σ_ν^{fc} les composantes normales des vecteurs


 FIG. 1.3 – Représentation graphique de l'opérateur de troncation R_ν

σ_ν , $(\sigma_\nu)^{ad}$ et $(\sigma_\nu)^{fc}$, qui sont

$$(1.26) \quad \sigma_\nu = \sigma_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} \cdot \nu, \quad \sigma_\nu^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} \cdot \nu,$$

et par σ_τ , σ_τ^{ad} et σ_τ^{fc} les composantes tangentielles des mêmes vecteurs, qui sont

$$(1.27) \quad \sigma_\tau = \sigma_\nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau^{ad} = (\sigma_\nu)^{ad} - \sigma_\nu^{ad} \nu, \quad \sigma_\tau^{fc} = (\sigma_\nu)^{fc} - \sigma_\nu^{fc} \nu.$$

Nous supposons que la composante normale du vecteur $(\sigma_\nu)^{ad}$ satisfait la condition

$$(1.28) \quad \sigma_\nu^{ad} = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$$

dans laquelle γ_ν est un coefficient positif et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.29) \quad R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases}$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. L'introduction de l'opérateur R_ν , ensemble avec l'opérateur \mathbf{R}_τ défini ci-dessous, est motivée par les arguments mathématiques mais ce n'est pas restrictif du point de vue physique, puisqu'aucune restriction de la taille du paramètre L n'est faite que dans ce qui suit (voir figure 1.3). Ainsi, en choisissant L très grand, nous pouvons assumer que $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$ et, donc, nous obtenons la condition de compliance normale

$$\sigma_\nu^{ad} = \begin{cases} \gamma_\nu \beta^2 u_\nu & \text{si } u_\nu \leq 0, \\ 0 & \text{si } u_\nu > 0. \end{cases}$$

Aussi, nous supposons que la composante normale du vecteur $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{fc}$ satisfait la condition de contact avec compliance normale

$$(1.30) \quad -\sigma_\nu^{fc} = p_\nu(u_\nu),$$

où u_ν est le déplacement normal et p_ν est la fonction positive prescrite telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Combinons les égalités (1.25), (1.26), (1.28) et (1.2), nous dérivons la condition de contact de compliance normale avec adhésion,

$$(1.31) \quad -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

La contribution de l'adhésion à la traction normale est donnée par le terme $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$. Ainsi, la traction adhésive est nonnegative et proportionnelle, avec un coefficient de proportionnalité γ_ν , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que u_ν n'excède pas la longueur du lien L .

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle du vecteur $(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})^{ad}$ satisfait la condition

$$(1.32) \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^{ad} = -\gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)$$

où, encore, γ_τ est un coefficient positif et $\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par

$$(1.33) \quad \mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases}$$

Cette condition montre que la contrainte tangentielle adhésive sur la surface de contact est proportionnelle au déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'excède pas la longueur du lien L .

Le frottement est modélisé par une version statique de la loi de frottement de Coulomb. Pour cela, considérons la décomposition (1.25) du vecteur de Cauchy et supposons que

$$(1.34) \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| \leq -\mu\sigma_\nu^{fc}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| < -\mu\sigma_\nu^{fc} \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc}\| = -\mu\sigma_\nu^{fc} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau^{fc} = -\lambda\mathbf{u}_\tau, \end{cases}$$

où μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. Combinons les relations (1.26), (1.27), (1.30), (1.32) et (1.34) nous obtenons la loi de frottement avec adhésion,

$$(1.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \mathbf{u}_\tau = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = -\lambda \mathbf{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.31) a été déjà utilisée dans [68] et les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.35) ont été considérées dans [57] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau) = \mathbf{u}_\tau$ et $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$, pour L très grand.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire

$$(1.36) \quad \dot{\beta} = -\left(\beta(\gamma_\nu R_\nu(u_\nu)^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau(\mathbf{u}_\tau)\|^2) - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$(1.37) \quad \beta(0) = \beta_0.$$

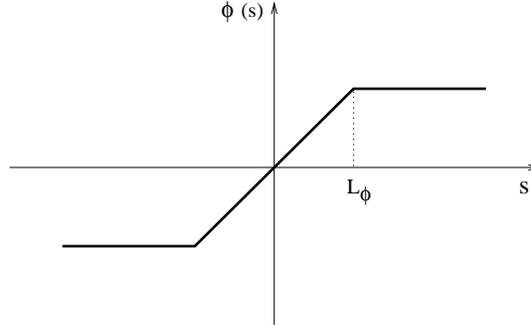
Ici et ci-dessous, en plus des paramètres positives γ_ν et γ_τ déjà introduits dans (1.28) et (1.32), ϵ_a est un paramètre positif et $r_+ = \max\{0, r\}$. Notons que le processus adhésif est irréversible, en effet, une fois que le décollement se passe le collage ne peut pas être rétabli, puisque $\dot{\beta} \leq 0$. Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [29, 68, 74].

1.5 Conditions électriques à la surface de contact

Dans ce paragraphe nous allons énoncer les conditions de contact électrique, associées aux problèmes électro-mécaniques, sur la partie Γ_3 de la surface. Nous supposons que la fondation est électriquement conductive et son potentiel est maintenu à φ_0 . La condition électrique sur Γ_3 est donnée par

$$(1.38) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = \psi(u_\nu - g) \phi(\varphi - \varphi_0) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

où ψ et ϕ sont des fonctions données qui seront décrites ultérieurement. Cette condition représente une condition régularisée qui peut être obtenue à partir des considérations suivantes.


 FIG. 1.4 – Représentation graphique de la fonction ϕ

Lorsqu'il n'y a pas de contact en un point sur la surface (i.e. $u_\nu < g$), l'interstice entre le corps et la base est supposé être isolant (disons qu'il est rempli d'air) et la composante normale du champ de déplacement électrique s'annule pour qu'il n'y ait aucune charge électrique libre sur la surface. Ainsi,

$$(1.39) \quad u_\nu < g \implies \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0.$$

Durant le processus de contact, (i.e. quand $u_\nu \geq g$) la composante normale du champ de déplacement électrique ou la charge électrique libre est supposé être proportionnelle à la différence de potentiel entre la surface du corps et la fondation, avec une constante positive k comme facteur de proportionnalité. Ainsi,

$$(1.40) \quad u_\nu \geq g \implies \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k(\varphi - \varphi_0).$$

Combinons (1.39), (1.40) pour obtenir

$$(1.41) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = k \chi_{[0, \infty)}(u_\nu - g)(\varphi - \varphi_0),$$

où $\chi_{[0, \infty)}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \infty)$, qui est donnée par

$$\chi_{[0, \infty)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < 0, \\ 1 & \text{if } r \geq 0. \end{cases}$$

La condition (1.41) décrit le contact électrique parfait et elle est en quelque sorte semblable à la condition bien connue de contact de Signorini. Les deux conditions peuvent être considérées comme des sur-idéalisations dans plusieurs applications.

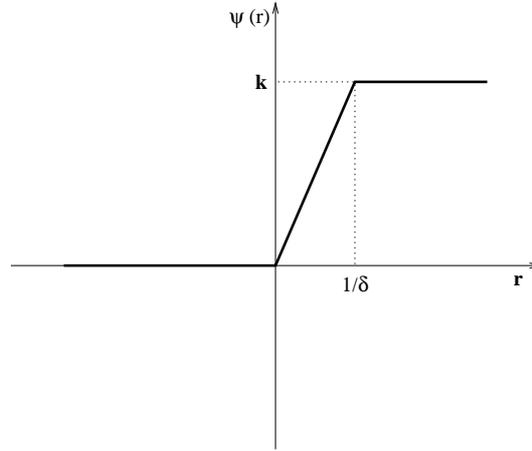


FIG. 1.5 – Représentation graphique de la fonction ψ

Pour la rendre plus réaliste, nous régularisons la condition (1.41) par la condition (1.38) dans laquelle ψ est une fonction régulière qui va être décrite ci-dessous et ϕ est une fonction de troncation,

$$(1.42) \quad \phi(s) = \begin{cases} -L_\phi & \text{si } s < -L_\phi, \\ s & \text{si } -L_\phi \leq s \leq L_\phi, \\ L_\phi & \text{si } s > L_\phi, \end{cases}$$

où L_ϕ est une constante positive très grande. De cette façon, la différence $\varphi - \varphi_0$ est remplacé par $\phi(\varphi - \varphi_0)$. Notons que cette troncation ne pose aucune limitation pratique sur l'applicabilité du modèle puisque L_ϕ peut être arbitrairement grand (voir figure 1.4) et donc dans les applications $\phi(\varphi - \varphi_0) = \varphi - \varphi_0$.

Les raisons de la régularisation (1.38) de (1.41) sont mathématiques.

Premièrement, nous avons besoin d'éviter les discontinuités dans les charges électriques lorsque le contact est établi et donc nous régularisons la fonction $k \chi_{[0, \infty)}$ dans (1.41) par une fonction Lipschitzienne ψ . Un choix possible est l'exemple suivant :

$$(1.43) \quad \psi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 0, \\ k\delta r & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{\delta}, \\ k & \text{si } r > \frac{1}{\delta}, \end{cases}$$

où $\delta > 0$ est un paramètre assez grand. Ce choix veut dire que durant le processus du contact, la conductivité électrique augmente avec le contact à travers les aspérités de

la surface, et se stabilise quand la pénétration $u_\nu - g$ atteint la valeur $\frac{1}{\delta}$ (voir figure 1.5) .

Deuxièmement, nous avons besoin du terme $\phi(\varphi - \varphi_0)$ pour rendre le terme $\varphi - \varphi_0$ borné.

Notons que lorsque $\psi \equiv 0$ dans (1.38), nous obtenons

$$(1.44) \quad \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T),$$

ce qui découple les problèmes électriques et mécaniques sur la surface de contact. La condition (1.44) modélise le cas où l'obstacle est un isolant parfait et a été utilisée dans [10, 46, 66, 67]. La condition (1.38) à la place de (1.44), introduit un couplage fort entre les conditions aux limites mécaniques et électriques et mène vers un nouveau modèle mathématique, non standard. Elle sera utilisée dans les chapitres 4 et 7 du mémoire. Par ailleurs, la condition (1.38) va être utilisée dans le cinquième chapitre du mémoire où nous avons supposé que la base est isolatrice (i.e. $\psi \equiv 0$).

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d ($d = 2,3$), de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} , Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ . Par ailleurs, nous considérons une partition Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 d'un côté et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes Γ_a et Γ_b d'un autre côté, telles que $mes \Gamma_1 > 0$ et $mes \Gamma_a > 0$.

2.1 Espaces de Sobolev

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u} et $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} &= \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 &= \{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{aligned}$$

Les espaces H, \mathcal{H}, H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H &= \int_{\Omega} u_i v_i \, dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} \, dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}}, \\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}_1} &= (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_H, \end{aligned}$$

respectivement, où $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de *déformation* et de *divergence*, définis par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in H_1$ nous utilisons la notation $\boldsymbol{\nu}$ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}$ de \mathbf{v} sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ ; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ , et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ . Pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \in H'_\Gamma$ tel que

$$(2.1) \quad (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}, \gamma \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}$ assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$(2.2) \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1

$$(2.3) \quad V = \{ \mathbf{v} \in H_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \}.$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V ; alors, il existe une constante $C_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$(2.4) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \geq C_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [53] p.79.

Nous considérons sur l'espace V , le produit scalaire donné par

$$(2.5) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$(2.6) \quad \|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.2) et (2.3), il existe une constante c_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$(2.7) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$(2.8) \quad \mathcal{Q} = \{ \beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3 \}.$$

Dans ce qui suit, nous définissons les espaces de Sobolev associés aux inconnues électriques (champ du déplacement électrique \mathbf{D} et le potentiel électrique φ) des problèmes électro-mécaniques qui vont être introduits dans les chapitres 4, 5 et 7 de la thèse. Soit les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega) \} = L^2(\Omega)^d, \\ \mathcal{W}_1 &= \{ \mathbf{D} = (D_i) \mid D_i \in L^2(\Omega), D_{i,i} \in L^2(\Omega) \}. \end{aligned}$$

munis des produits scalaires

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} = \int_{\Omega} D_i E_i dx, \quad (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}_1} = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{\mathcal{W}} + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \operatorname{div} \mathbf{E})_{L^2(\Omega)},$$

et leurs normes associées $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_1}$, respectivement. Le champ du potentiel électrique va être trouvé dans l'espace

$$W = \{ \xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ sur } \Gamma_a \}.$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est satisfaite, ainsi,

$$(2.9) \quad \|\nabla \xi\|_{\mathcal{W}} \geq c_F \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \xi \in W,$$

où $c_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ_a et $\nabla \xi = (\xi_{,i})$. Sur l'espace W , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \xi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \xi)_W,$$

et soit $\|\cdot\|_W$ la norme associée. Il s'ensuit de (2.9) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_W$ sont des normes équivalentes sur W et donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0 dépendant uniquement de Ω , Γ_a et Γ_3 , telle que

$$(2.10) \quad \|\xi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\xi\|_W \quad \forall \xi \in W.$$

Aussi, rappelons que lorsque $\mathbf{D} \in \mathcal{W}_1$ est une fonction régulière, la formule de Green est satisfaite :

$$(2.11) \quad (\mathbf{D}, \nabla \xi)_W + (\operatorname{div} \mathbf{D}, \xi)_W = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} \xi \, da \quad \forall \xi \in H^1(\Omega).$$

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur par exemple à [1, 14, 24].

2.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Bien que le contenu de ce paragraphe est standard et peut être trouvé dans un grand nombre d'ouvrages, une revue d'ensemble sur ce sujet nous a paru utile.

Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeurs dans X .

Définition 2.1. *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.*

Définition 2.2. *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite fortement dérivable dans $t_0 \in (0, T)$ s'il existe un élément $\frac{df}{dt}(t_0) \in X$ appelé la dérivée forte de f dans t_0 , tel que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0)) - \frac{df}{dt}(t_0) \right\|_X = 0.$$

Définition 2.3. *Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt = 0.$$