

1 Méthode générale

Pour montrer une propriété en mathématiques, on suit la plupart du temps le processus suivant :

- 1) Retranscrire au brouillon l'énoncé en terme de proposition logique.
- 2) Décomposer la rédaction à partir de la formule logique.
- 3) Compléter les trous.

L'étape 1 demande de connaître les définitions du cours.

L'étape 2 est automatique une fois les quelques 10 cas de figure retenus.

L'étape 3 est potentiellement la plus complexe, car c'est là qu'il faut éventuellement inventer quelque chose.

Pour l'étape 3, on utilise souvent les hypothèses de l'énoncé, qui s'énoncent en général sous forme de formule logique. Il faut alors savoir comment utiliser lesdites formules.

La section suivante reprend, pour chaque symbole logique, la manière de le montrer et la manière de l'utiliser.

Exemple : L'énoncé donne une fonction $f : E \rightarrow F$ et demande de montrer qu'elle est injective.

La méthode donne donc :

1) La proposition à montrer est : $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

2) En appliquant les automatismes de la section suivante, on écrit :

"Soient $x, y \in E$.

Supposons $f(x) = f(y)$." et on sait qu'il faut désormais montrer $x = y$.

3) Cette étape dépend évidemment de la fonction f donnée par l'énoncé et des hypothèses que l'on a dessus. Cette étape n'est pas automatisable.

2 Boîte à outils : prouver une formule

On suppose ici que l'on cherche à montrer une certaine formule φ . Selon sa forme, on utilise les méthodes suivantes.

2.1 La conjonction : ET

Pour montrer P ET Q , il faut montrer P et montrer Q .

2.2 L'implication : \Rightarrow

Pour montrer $P \Rightarrow Q$, il y a 2 méthodes :

Méthode 1 : on écrit "Supposons P ."

Ensuite, il faut montrer Q (et on peut pour cela utiliser l'hypothèse P).

Méthode 2 : on passe par la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

On écrit donc "Supposons $\neg Q$ " et on montre $\neg P$.

2.3 La disjonction : OU

Pour montrer $P \text{ OU } Q$, il y a en général 2 possibilités (à choisir donc selon les situations).

Méthode 1 : on utilise une disjonction de cas. Dans le cas 1, on montre P . Dans le cas 2, on montre Q .

La difficulté est de trouver la bonne disjonction...

Méthode 2 : on utilise le fait que $P \text{ OU } Q$ est équivalent à $\neg P \Rightarrow Q$.

On écrit alors "Supposons $\neg P$ " et on montre Q .

2.4 L'équivalence : \Leftrightarrow

Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, on raisonne par double implication.

On montre donc $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

En déroulant, cela veut dire qu'on écrit :

"Supposons P . [Preuve de Q].

Supposons Q . [Preuve de P]."

2.5 Universalité : \forall

Pour montrer $\forall x \in E, P(x)$, on écrit "Soit $x \in E$." puis on montre $P(x)$.

2.6 Existence : \exists

Pour montrer $\exists x \in E, P(x)$, il y a un peu de travail au brouillon pour trouver un truc qui convient.

On écrit alors : "Posons $x =$ [truc trouvé au brouillon]."

On vérifie ensuite que x est dans E et que l'on a $P(x)$.

2.7 Autres méthodes

Evidemment, il existe d'autres méthodes de preuve classique : le raisonnement par l'absurde, la récurrence, etc.

3 Boîte à outils : utiliser une hypothèse

3.1 La conjonction : ET

Lorsque l'on a $P \text{ ET } Q$ comme hypothèse, on peut utiliser l'hypothèse P et l'hypothèse Q comme bon nous semble.

3.2 L'implication : \Rightarrow

Pour utiliser l'hypothèse $P \Rightarrow Q$, il faut également savoir que P est vrai.

On peut alors écrire que Q est vrai.

3.3 La disjonction : OU

Pour utiliser P OU Q , on fait une disjonction de cas.

On écrit alors :

"Si P : [preuve du résultat].

Si Q : [preuve du résultat]."

3.4 L'équivalence : \Leftrightarrow

Si on a $P \Leftrightarrow Q$ en hypothèse, cela veut dire que l'on peut utiliser les 2 implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ à notre guise.

3.5 L'universalité : \forall

Si on a comme hypothèse $\forall x \in E, P(x)$, et que l'on dispose d'un $x \in E$, on peut alors écrire $P(x)$.

3.6 L'existence : \exists

Pour utiliser $\exists x \in E, P(x)$, on écrit : "il existe x dans E tel que $P(x)$ " (en toutes lettres).

On peut ensuite utiliser ce x (Attention, ce x n'est pas n'importe lequel, c'en est un en particulier!).

3.7 Et les théorèmes ?

Evidemment, les théorèmes du cours font partie des outils que vous avez toujours le droit d'utiliser. Pour appliquer un théorème, il faut vérifier toutes ses hypothèses et on peut alors appliquer sa conclusion.

4 Exercices

4.1 Entraînement pour l'étape 1

Pour chacune des phrases suivantes, écrire une formule logique la décrivant.

A, B désignent des parties d'un ensemble E .

- 1) L'intersection de A et B est non vide.
- 2) A est inclus dans B .
- 3) A et B sont disjoints.

u désigne une suite à valeurs réelles.

- 4) u est positive.
- 5) u est strictement croissante.
- 6) u est monotone.
- 7) u est bornée.
- 8) u est positive.
- 9) u converge vers 2.

f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 10) f est 4-périodique.

- 11) f est injective.
- 12) f est surjective.
- 13) f est nulle.
- 14) f est strictement décroissante.
- 15) f est paire.

4.2 Entraînement pour l'étape 2

Ecrire les schémas de preuve des phrases suivantes (évidemment, dans un vrai exercice, il y a des trous à compléter, indiqués entre crochets).

Deux exemples à partir des phrases de l'exercice précédent :

13) Soit $x \in \mathbb{R}$. [Preuve de $f(x) = 0$].

7) Posons $M = [truc]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. [Preuve de $|u_n| \leq M$].

0) Faire de même pour les phrases 1 à 15 de l'exercice précédent.

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ une famille d'un ev E .

Ecrire les schémas de preuve de " \mathcal{B} est libre" et de " \mathcal{B} est génératrice".

2) Soient F, G des sev d'un ev E .

Ecrire le schéma de preuve de " $F \oplus G = E$ ".

3) Soit E un ev et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une fonction de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

Ecrire le schéma de preuve de " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E ".