TD 3
Application du théorème des trois perpendiculaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une métrique M. Par la suite W désigne un sous-espace vectoriel de E et l'on note P_W le projecteur M-orthogonal sur W.

(a) **Inertie d'un nuage de points.** On rappelle qu'un nuage $\mathcal{M}$ de n points munis de masses p_i, peut être identifié à l'ensemble formé par les n vecteurs $x_i \in E$ représentant ces points :

$$\mathcal{M} = \{x_i \mid i = 1, ..., n\},$$

où E désigne ici l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{E}$ contenant les n points. On rappelle que le centre de gravité g de ce nuage est défini par :

$$g = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i, \text{ avec } p = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Dans tout le texte, on suppose que $g = 0$ et que l'inertie totale du nuage $\mathcal{M}$ peut s'écrire sous la forme :

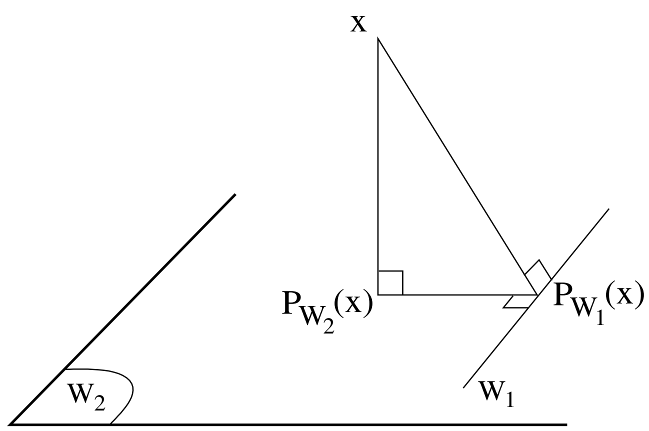
$$I_T(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \|x_i - g\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \|x_i\|^2 .$$

De plus, on définit l'inertie du nuage $\mathcal{M}$ par rapport au sous espace vectoriel W comme étant :

$$I_W(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \|x_i - P_W(x_i)\|^2.$$

En utilisant le fait que l'application linéaire $I - P_W$ est le projecteur M-orthogonal sur $W^\perp$, montrer les relations suivantes :
a) $I_{W^\perp}(\mathcal{M}) = I_T(P_W(\mathcal{M}))$,
b) $I_T(\mathcal{M}) = I_W(\mathcal{M}) + I_{W^\perp}(\mathcal{M})$.

(b) **Théorème des trois perpendiculaires.**
Si W_1 et W_2 désignent deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $W_1 \subseteq W_2$,
(ii) $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$,
(iii) $P_{W_1} = P_{W_1} \circ P_{W_2}$.
Remarque : cette propriété est appelée "théorème des trois perpendiculaires" ; en effet, la condition (iii) s'interprète géométriquement par l'existence de trois angles droits, comme le montre l'exemple suivant :



(c) **Inertie du nuage projeté**

(i) Soit $\mathcal{N}$ le nuage $\mathcal{M}$ projeté sur W, c'est-à-dire $\mathcal{N} = P_W(\mathcal{M})$, et soit Δu un axe du sous-espace vectoriel W. Montrer [2] que l'inertie de $\mathcal{N}$ par rapport à $(\Delta u)^\perp$ est égale à l'inertie

2. on utilisera de préférence le théorème des trois perpendiculaires.

du nuage $\mathcal{M}$ par rapport à $(\Delta u)^{\perp}$. En déduire que le premier axe principal du nuage $\mathcal{N}$ est l'axe de W à inertie minimum pour le nuage $\mathcal{M}$.

(ii) Montrer que :

$$I_{\Delta u}(\mathcal{N}) = I_{\Delta u}(\mathcal{M}) + I_T(\mathcal{N}) - I_T(\mathcal{M}),$$

avec :
- $I_{\Delta u}(\mathcal{N})$: inertie de $\mathcal{N}$ par rapport à Δu,
- $I_{\Delta u}(\mathcal{M})$: inertie de $\mathcal{M}$ par rapport à Δu,
- $I_T(\mathcal{N})$ inertie totale de $\mathcal{N}$,
- $I_T(\mathcal{M})$ inertie totale de $\mathcal{M}$.