ABC est un triangle et I est le centre du cercle inscrit à ce triangle. On considère les trois cercles $(\mathcal{C}_A)$, $(\mathcal{C}_B)$ et $(\mathcal{C}_C)$ dont les diamètres sont respectivement AI, BI et CI.

On suppose le plan orienté. La *Figure 1* a été faite avec les données suivantes : $AC < BC < AC$.
Cela signifie que si α, β et γ sont les mesures comprises entre 0 et π des angles BAC, CBA et ACB du triangle ABC, alors : $\gamma < \alpha < \beta$.

Dans ce qui suit, on écarte les cas où le triangle ABC est isocèle ou équilatéral, car dans ces cas les propriétés que nous allons établir sont immédiates.

On pose :

$$\begin{cases} \{A_i, I\} = (\mathcal{C}_B) \cap (AI) \\ \{B_i, I\} = (\mathcal{C}_A) \cap (BI) \\ \{C_i, I\} = (\mathcal{C}_B) \cap (CI) \\ \{A_e, I\} = (\mathcal{C}_C) \cap (AI) \\ \{B_e, I\} = (\mathcal{C}_C) \cap (BI) \\ \{C_e, I\} = (\mathcal{C}_A) \cap (CI) \end{cases}$$

Les points d'indice i sont intérieurs au triangle ABC, alors que ceux d'indice e lui sont extérieurs.

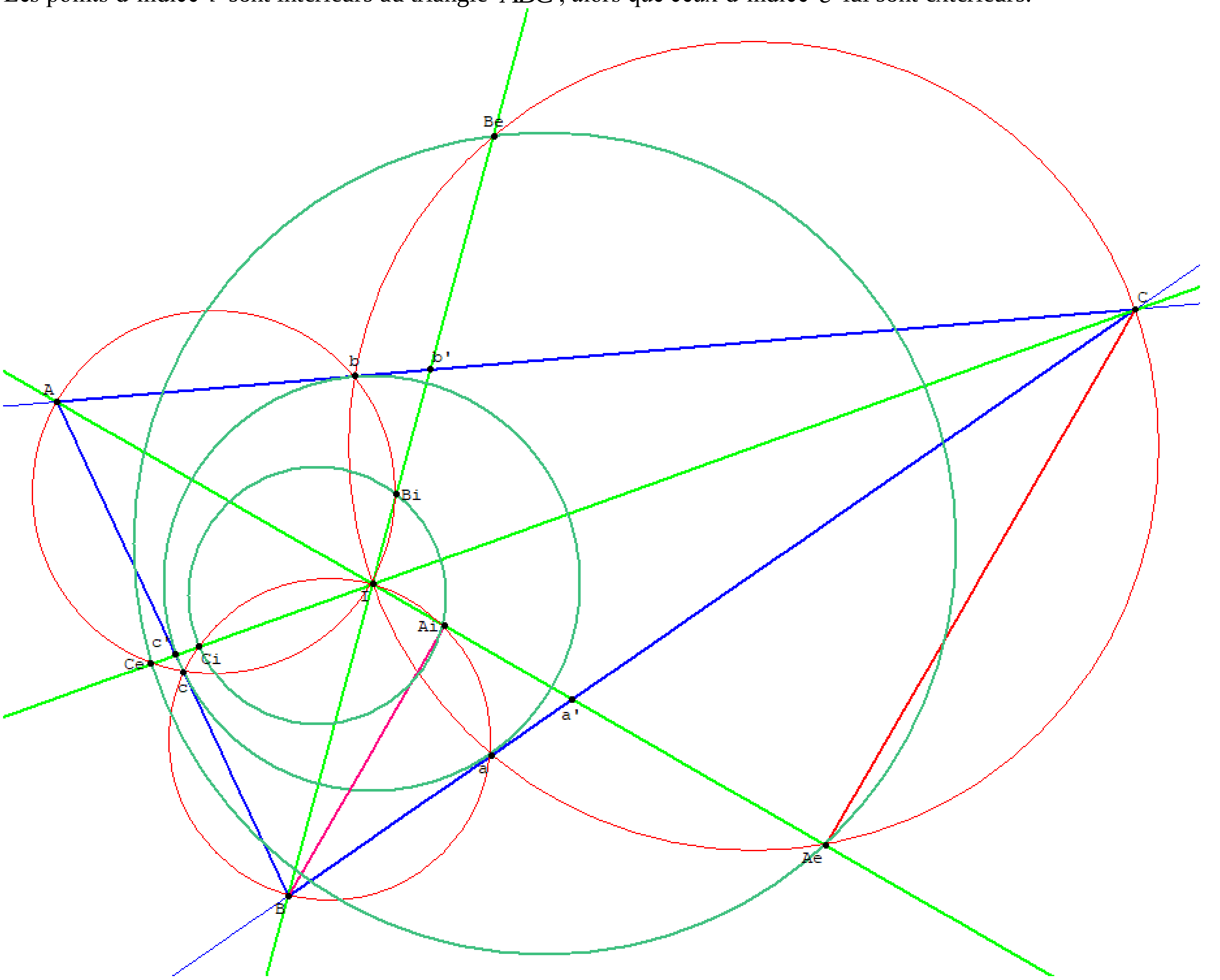

Figure 1

1) Les points d'indice i et ceux d'indice e. (*Figure 1*)

Nous allons montrer que le point A_i est intérieur au triangle ABC alors que A_e lui est extérieur, les autres démonstrations pour les autres points d'indice *i* et *e* sont analogues.
Par définition de $(\mathcal{C}_B)$ et $(\mathcal{C}_C)$, les points A_i et A_e sont les projetés orthogonaux respectifs des points B et C sur (AI).
Dans le triangle rectangle BA_iA on a :

$$\beta' = ((BA_i),(BA)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \quad [\pi]$$

Or :

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < \beta \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \gamma < \beta$$

Il en résulte que le point A_i est bien intérieur au triangle ABC.
De même, dans le triangle rectangle CAA_e, on a :

$$\gamma' = ((CA),(CA_e)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \quad [\pi]$$

Mais ici l'on a :

$$\gamma < \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \gamma < \beta$$

ce qui justifie que le point A_e est extérieur au triangle ABC.

2) Droites parallèles. (*Figure 2*)

Les résultats qui suivent prennent en compte la configuration donnée. Si celle-ci change, les propriétés demeurent avec des lettres différentes.
Pour la suite, les points a', b' et c' sont les pieds der bissectrices (AI), (BI) et (CI) du triangle ABC, de même les points a, b et c sont les projetés orthogonaux respectifs du point I sur BC, CA et AB de ce triangle.
Nous procédons à un calcul des mesures de certains angles de sommet I.
Dans le triangle ABI, on a :

$$((Ia'),(Ib')) = ((IA),(IB)) = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} \quad [\pi]$$

On démontre de même que :

$$\begin{cases} ((Ib'),(Ic')) = ((IB),(IC)) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2} & [\pi] \\ ((Ic'),(Ia')) = ((IC),(IA)) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\beta}{2} & [\pi] \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$((Ib'),(IA)) = ((IB),(Ia')) = \pi - ((IA),(IB)) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \quad [\pi]$$

On trouve par les mêmes procédés :

$$\begin{cases} \big((Ia'),(IC)\big)=\big((IA),(Ic')\big)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\gamma}{2} & [\pi] \\ \big((Ic'),(IB)\big)=\big((IC),(Ib')\big)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2} & [\pi] \end{cases}$$

On a alors, du fait que le quadrilatère B_eIA_eC est inscriptible (triangles rectangles de même hypoténuse):

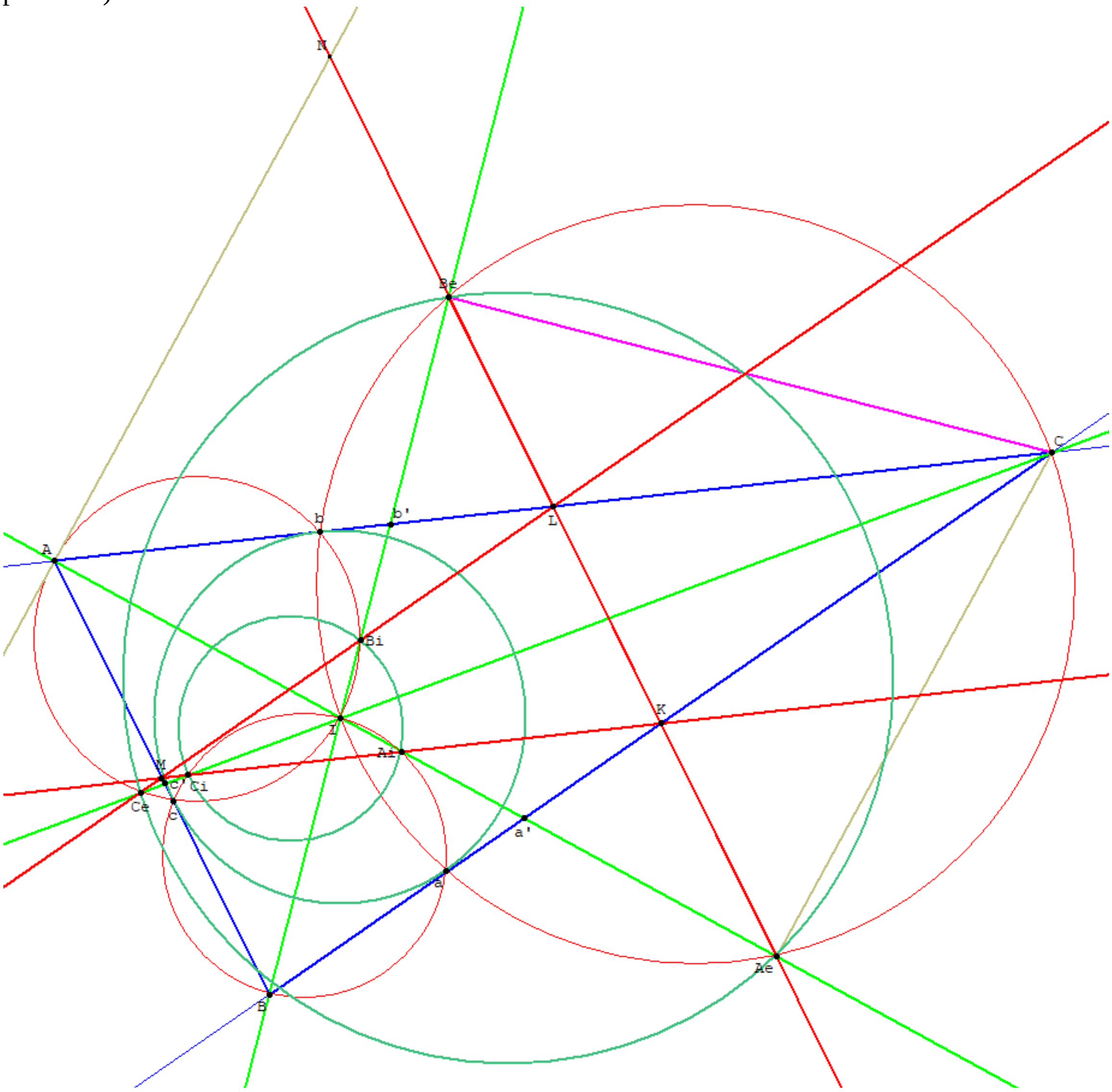

Figure 2

$$\big((A_eB_e),(A_eI)\big)=\big((CB_e),(CI)\big) \quad [\pi]$$

Mais, le triangle ICB_e est rectangle en B_e, et ce qui précède permet d'écrire :

$$\big((CB_e),(CI)\big)=\frac{\pi}{2}-\big((IC),(IB_e)\big)=\frac{\pi}{2}-\big((IC),(Ib')\big)=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}=\big((AB),(AA_e)\big) \quad [\pi]$$

Soit :

$$\big((A_eB_e),(A_eI)\big)=\big((AB),(AA_e)\big) \quad [\pi]$$

On en déduit que :

$$(A_eB_e)//(AB)$$

On démontre de même que $(B_iC_e)//(BC)$ et $(A_iC_i)//(AC)$.

3) Précisions sur les trois droites parallèles aux côtés du triangle ABC. (*Figure 2*)

On désigne par N l'intersection de la droite (A_eB_e) avec la seconde bissectrice de l'angle BAC (perpendiculaire en A à la droite (AI)).
On a :

$$((A_eN),(A_eA))=((A_eB_e),(A_eI))=\frac{\alpha}{2}=((Aa'),(AC))=((AA_e),(AC)) \quad [\pi]$$

Par suite les deux triangles rectangles NAA_e et AA_eC sont isométriques, et le quadrilatère AA_eCN est un rectangle dont les diagonales se coupent au milieu L de $[AC]$.
Ainsi le point L est sur (A_eB_e), et puisque $(A_eB_e)//(AC)$, le milieu K de $[BC]$ est lui aussi sur (A_eB_e). Si M est le milieu de $[AB]$ on a finalement :

$$\begin{cases}(A_eB_e)=(KL)\\(B_iC_e)=(LM)\\(C_iA_i)=(MK)\end{cases}$$

3) Alignements. (*Figure 3*)

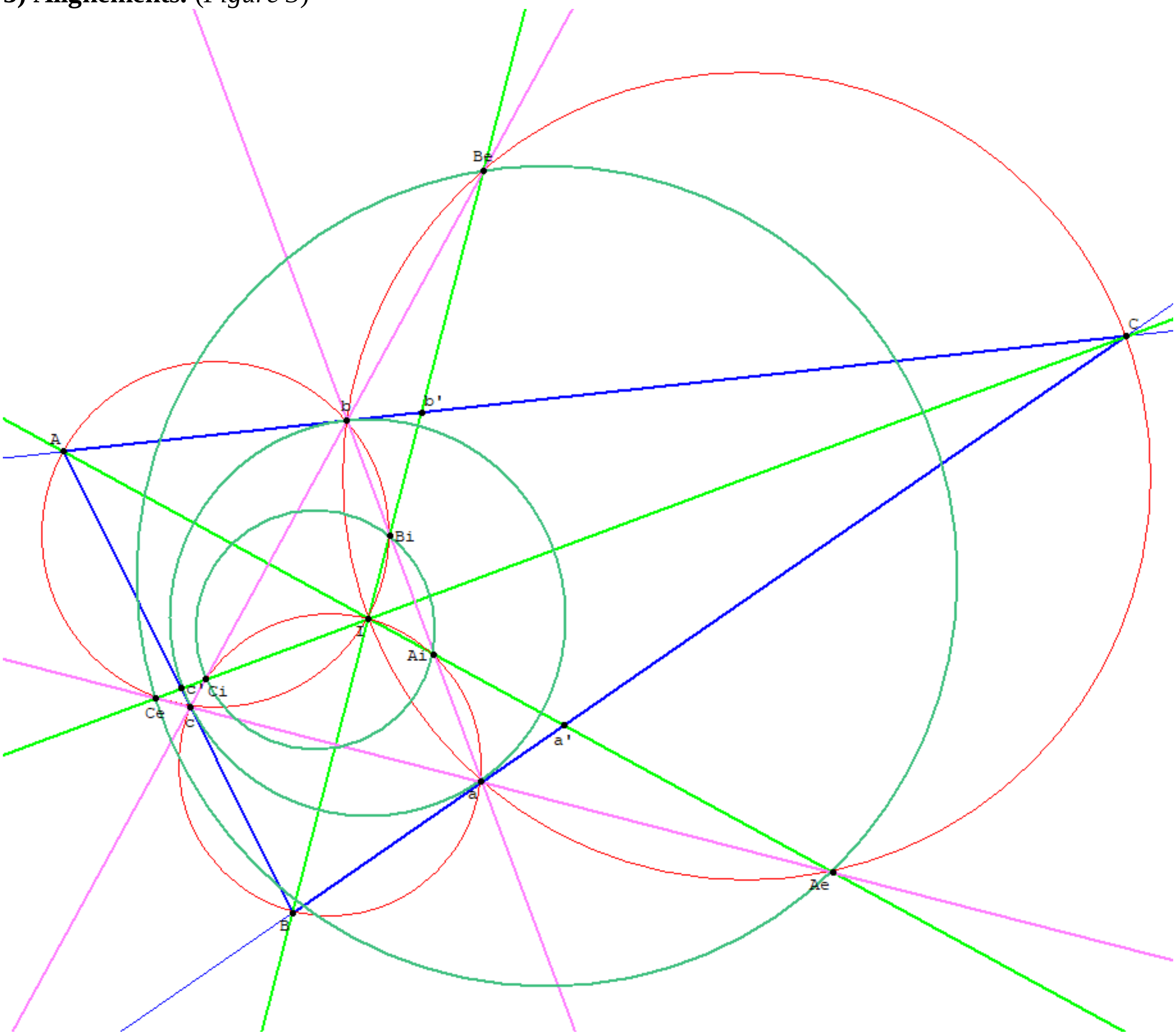

Figure 3

Le triangle Abc est isocèle de sommet A, ce qui résulte de la définition des points b et c. On a donc :

$$((bA),(bc)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad [\pi]$$

Par définition $bICB_e$ est inscriptible, et compte tenu de ce qui précède :

$$((bC),(bB_e)) = ((IC),(IB_e)) = ((IC),(Ib')) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad [\pi]$$

On a donc :

$$((bA),(bc)) = ((bC),(bB_e)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad [\pi]$$

ce qui prouve que $B_e \in (bc)$ car les trois points A, b et C sont alignés.

Plus généralement, et de la même façon, on démontre que :

$$\begin{cases} (B_eC_i) = (bc) \\ (C_eA_e) = (ca) \\ (A_iB_i) = (ab) \end{cases}$$

4) Points cocycliques et alignement. (*Figure 4*)

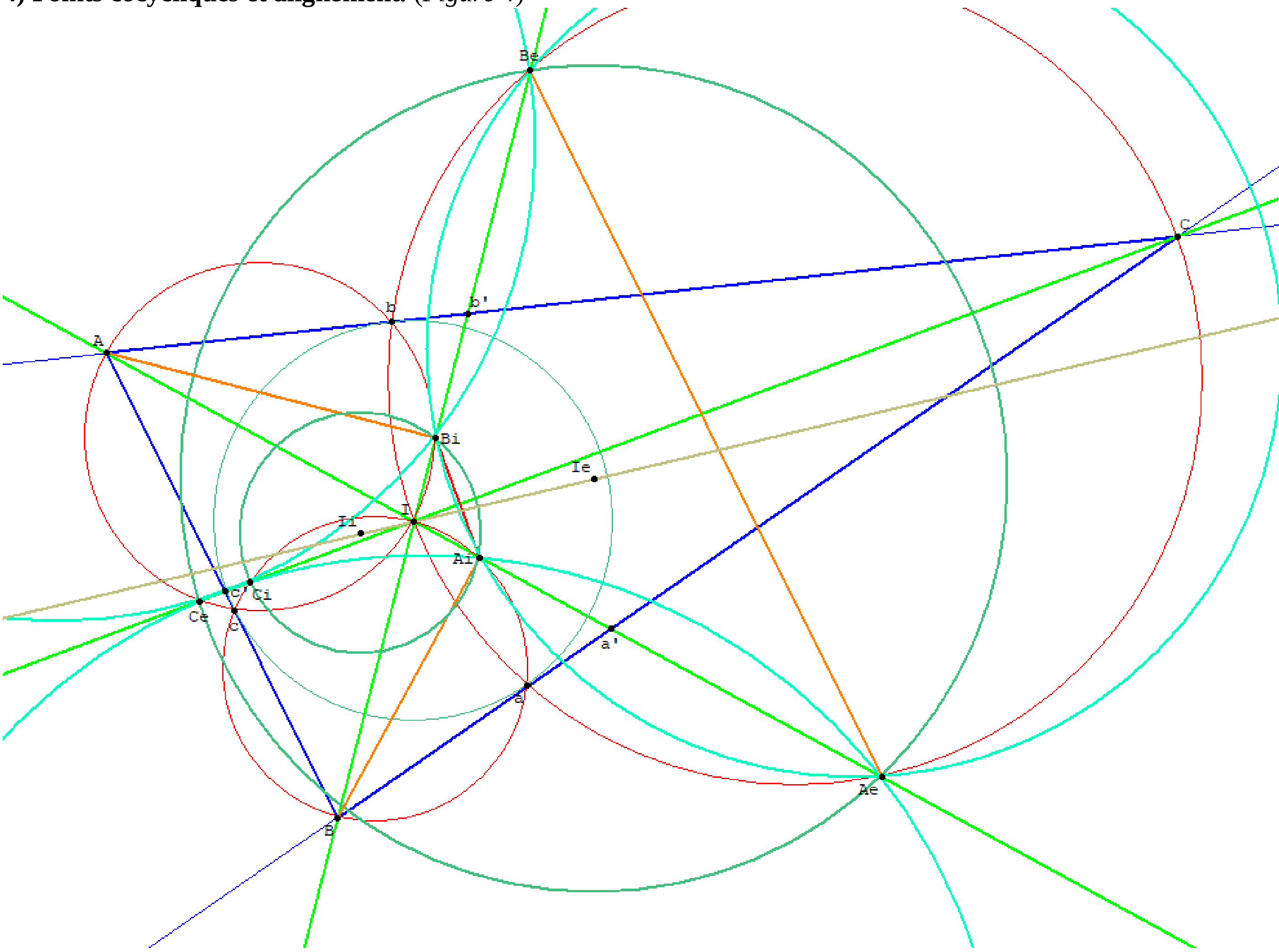

Figure 4

Les deux triangles rectangles ABB_i et ABA_i ont la même hypoténuse et donc le quadrilatère ABA_iB_i est inscriptible. On a donc :

$$\left((A_iB_i),(A_iA)\right)=\left((BB_i),(BA)\right)=\frac{\beta}{2}\quad[\pi]$$

D'un autre côté, puisque $(A_eB_e)//(AC)$, on peut écrire :

$$\left((B_eB_i),(B_eA_e)\right)=\left((B_eB),(B_eA_e)\right)=\left((BB_i),(BA)\right)=\left((BB_e),(BB_i)\right)=\frac{\beta}{2}\quad[\pi]$$

On a donc :

$$\left((A_iB_i),(A_iA_e)\right)=\left((A_iB_i),(A_iA)\right)=\frac{\beta}{2}=\left((B_eB_i),(B_eA_e)\right)\quad[\pi]$$

et il en résulte que le quadrilatère $A_eB_eB_iA_i$ est inscriptible. On montre de la même façon qu'il en de même pour les quadrilatères $B_eC_eC_iB_i$ et $C_eA_eA_iC_i$.

Par définition de ces trois cercles, le point I est leur centre radical. Si p désigne la puissance commune du point I par rapport à ces trois cercles, on a :

$$p=\overline{IA_i}.\overline{IA_e}=\overline{IB_i}.\overline{IB_e}=\overline{IC_i}.\overline{IC_e}$$

On en déduit en particulier que l'inversion $\mathcal{I}_I$ de centre I de rapport p échange les cercles $(A_iB_iC_i)$ et $(A_eB_eC_e)$. Si I_i est le centre de $(A_iB_iC_i)$, et I_e celui de $(A_eB_eC_e)$, il en résulte que les points I, I_i et I_e sont alignés.

5) Calcul de p. (*Figure 5*)

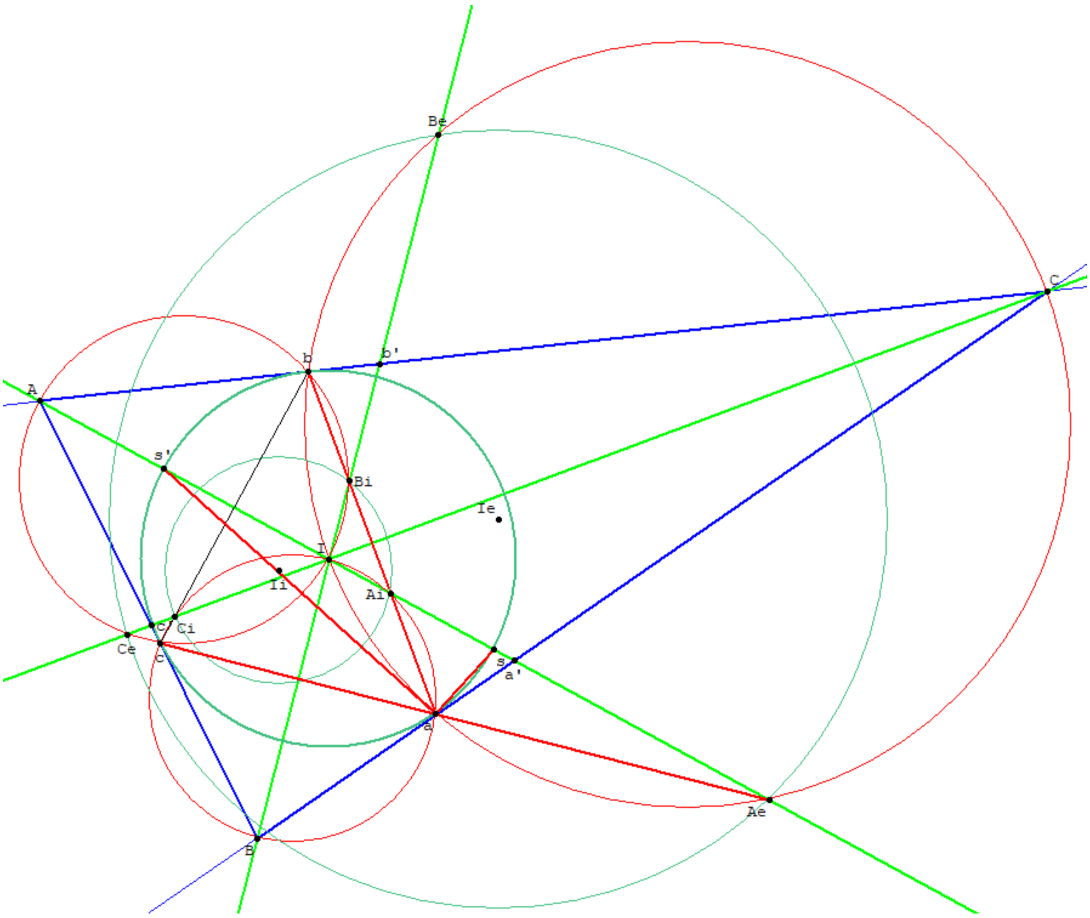

Figure 5

On désigne par s et s' les intersections de la droite (AI) avec le cercle inscrit $(\mathcal{C}_I)$ au triangle ABC. Par définition des points a et c, la droite (AI) est la médiatrice du segment $[bc]$, de sorte que les points s et s' sont les milieux des deux arcs bc du cercle $(\mathcal{C}_I)$.
Les points s et s' étant disposés comme sur la *Figure* 5, on a donc :

$$((ab),(as')) = ((as'),(ac)) \quad [\pi]$$

On sait que $A_e \in (ac)$ l'égalité précédente prouve que (as') est une bissectrice de l'angle $A_e ab$, et comme $A_i \in (ab)$, on en déduit que (as') est une bissectrice de l'angle $A_e AA_i$. L'autre bissectrice est la perpendiculaire à (as') qui passe par a. Compte tenu de la définition des points s et s' cette seconde bissectrice est la droite (as).
En conséquence, on a :

$$(s', s, A_i, A_e) = -1$$

Puisque I est le milieu de $[ss']$, on a donc en désignant par r le rayon du cercle $(\mathcal{C}_I)$:

$$p = \overline{IA_i}.\overline{IA_e} = Is^2 = r^2$$

6) Le point A et un faisceau de cercles. (*Figure 6*)

La polaire du point A par rapport au cercle $(\mathcal{C}_I)$ est la droite (bc), cette droite passe par B_e, par suite la polaire de B_e par rapport au cercle $(\mathcal{C}_I)$ est la perpendiculaire à (IB_e) qui passe par A, c'est donc la droite (AB_i).
On pose :

$$\{B_i^{'}\} = (AB_i) \cap (bc)$$

ce qui précède permet de dire que (AB_e) est la polaire du point $B_i^{'}$ par rapport au cercle $(\mathcal{C}_I)$. Il en résulte que :

$$(IB_i^{'}) \perp (AB_e)$$

On désigne par $B_e^{'}$ le second point d'intersection de la droite (AB_e) et du cercle (Acb), puisque AI est un diamètre de $(\mathcal{C}_A)$ le triangle $AIB_e^{'}$ est rectangle en $B_e^{'}$. Les droites $(IB_e^{'})$ et $(IB_i^{'})$ perpendiculaires à (AB_e) sont donc confondues. Les trois points I, $B_i^{'}$ et $B_e^{'}$ sont donc alignés.
On désigne par I' le milieu du segment $[bc]$. Les triangles $B_i^{'}I'I$ et $B_i^{'}IB_i$ sont deux triangles rectangles de même hypoténuse, le quadrilatère $B_i^{'}I'IB_i$ est donc inscriptible. De même les triangles rectangles $B_e B_i^{'} B_e$ et $B_i^{'} B_i B_e$ ont la même hypoténuse, et le quadrilatère $B_e B_e^{'} B_i^{'} B_i$ est inscriptible.
Puisque $B_i^{'}I'IB_i$ est inscriptible, on en déduit que :

$$((B_i^{'}C_i),(B_i^{'}B_i)) = ((B_i^{'}I'),(B_i^{'}B_i)) = ((II'),(IB_i)) = ((Ia'),(IB)) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad [\pi]$$

Par ailleurs, puisque $(A_iC_i) // (AC)$, on a :

$$((A_iC_i),(A_iA)) = ((AC),(AA_1)) = -\frac{\alpha}{2} \quad [\pi]$$

(égalité des angles alternes internes).

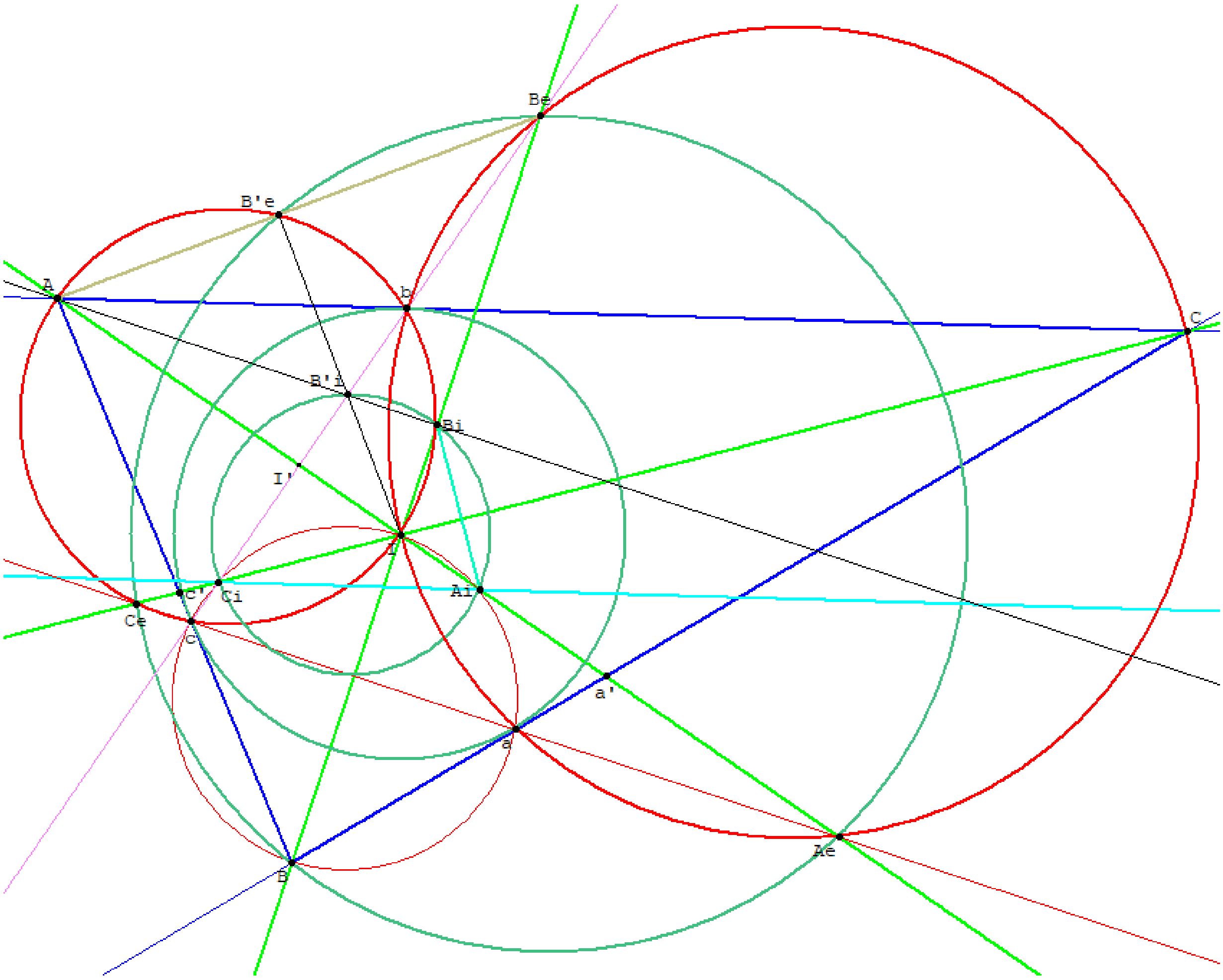

Figure 6

Le quadrilatère $A_iA_eB_eB_i$ étant inscriptible et puisque $(B_eA_e)//(BA)$, on a :

$$\left((A_iA),(A_iB_i)\right)=\left((A_iA_e),(A_iB_i)\right)=\left((B_eA_e),(B_eB_i)\right)=\left((B_eA_e),(B_eB)\right)=\left((BA),(BB_e)\right)=-\frac{\beta}{2}\quad[\pi]$$

l'avant dernière égalité résultant de l'égalité des angles alternes internes.
On a donc :

$$\left((A_iC_i),(A_iB_i)\right)=\left((A_iC_i),(A_iA)\right)+\left((A_iA),(A_iB_i)\right)=-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\left((B_i'C_i),(B_i'B_i)\right)\quad[\pi]$$

Cela montre donc que :

$$B_i'\in\left(A_iB_iC_i\right)$$

On considère l'inversion $\mathcal{I}_A$ de centre A de rapport Ab^2. L'image du cercle $(\mathcal{C}_A)$ par cette inversion est la droite (bc). On a donc puisque les points B_e et B_i' sont sur (bc) :

$$\begin{cases}\mathcal{I}_A\left(B_e'\right)=B_e\\ \mathcal{I}_A\left(B_i'\right)=B_i\end{cases}$$

On a en exprimant la puissance du point A par rapport au cercle $\left(B_i'B_iB_eB_e'\right)$, et en tenant compte du rapport de l'inversion $\mathcal{I}_A$:

$$\overline{AB_i'}.\overline{AB_i}=\overline{AB_e'}.\overline{AB_e}=Ab^2$$

Ceci qui montre, compte tenu de ce qui précède, que le point A a la même puissance par rapport aux trois cercles $(\mathcal{C}_I)$, $(A_iB_iC_i)$ et $(A_eB_eC_e)$.
Or, ces trois cercles ont leurs centres alignés, A est donc un point de l'axe radical commun aux trois cercles qui appartiennent donc à un même faisceau $\mathcal{F}_I$ dont l'axe radical est la perpendiculaire à (I_iI_e) qui passe par A.
Notons en passant que le point $B_e^{'}$ est l'image de $B_i^{'}$ par l'inversion $\mathcal{I}_I$ car :

$$\begin{cases} \mathcal{I}_I\left((bc)\right) = (AcIb) \\ \mathcal{I}_I\left((A_iB_iC_i)\right) = (A_eB_eC_e) \end{cases}$$

On sait que $\mathcal{I}_I\left(B_1^{'}\right) \in \left(IB_i^{'}\right)$, et puisque $B_i^{'} \in (bc) \bigcap (A_iB_iC_i)$, on en déduit que :

$$\mathcal{I}_I\left(B_i^{'}\right) \in \left(IB_1^{'}\right) \bigcap (AcIb) \bigcap (A_eB_eC_e)$$

On voit donc que :

$$\mathcal{I}_I\left(B_i^{'}\right) = B_e^{'}$$

7) L'axe radical du faisceau $\mathcal{F}_I$. (*Figure 7*)

Les sommets des deux triangles $A_iB_iC_i$ et $A_eB_eC_e$ sont portés par trois droites concourante, on peut donc appliquer le théorème de Desargues pour voir que les points U, V et W définis par :

$$\begin{cases} \{U\} = (B_iC_i) \bigcap (B_eC_e) \\ \{V\} = (C_iA_i) \bigcap (C_eA_e) \\ \{W\} = (A_iB_i) \bigcap (A_eB_e) \end{cases}$$

sont alignés.
$C_iB_iB_eC_e$ est inscriptible, par suite :

$$\overline{UC_i}.\overline{UB_i} = \overline{UC_e}.\overline{UB_e}$$

et, compte tenu de la position des points, ceci montre que le point U a la même puissance par rapport aux deux cercles $A_iB_iC_i$ et $A_eB_eC_e$, ce point est donc sur l'axe radical de $\mathcal{F}_I$, et il en est de même des points V et W. La droite de Desargues associée aux triangles homologiques $A_iB_iC_i$ et $A_eB_eC_e$ est l'axe radical du faisceau $\mathcal{F}_I$, le point A, dans ce cas de figure, appartient à cet axe radical. On notera que dans ce cas de figure, l'intersection de l'axe (UV) avec la droite (I_iI_e) est située sur le cercle $(\mathcal{C}_A)$.

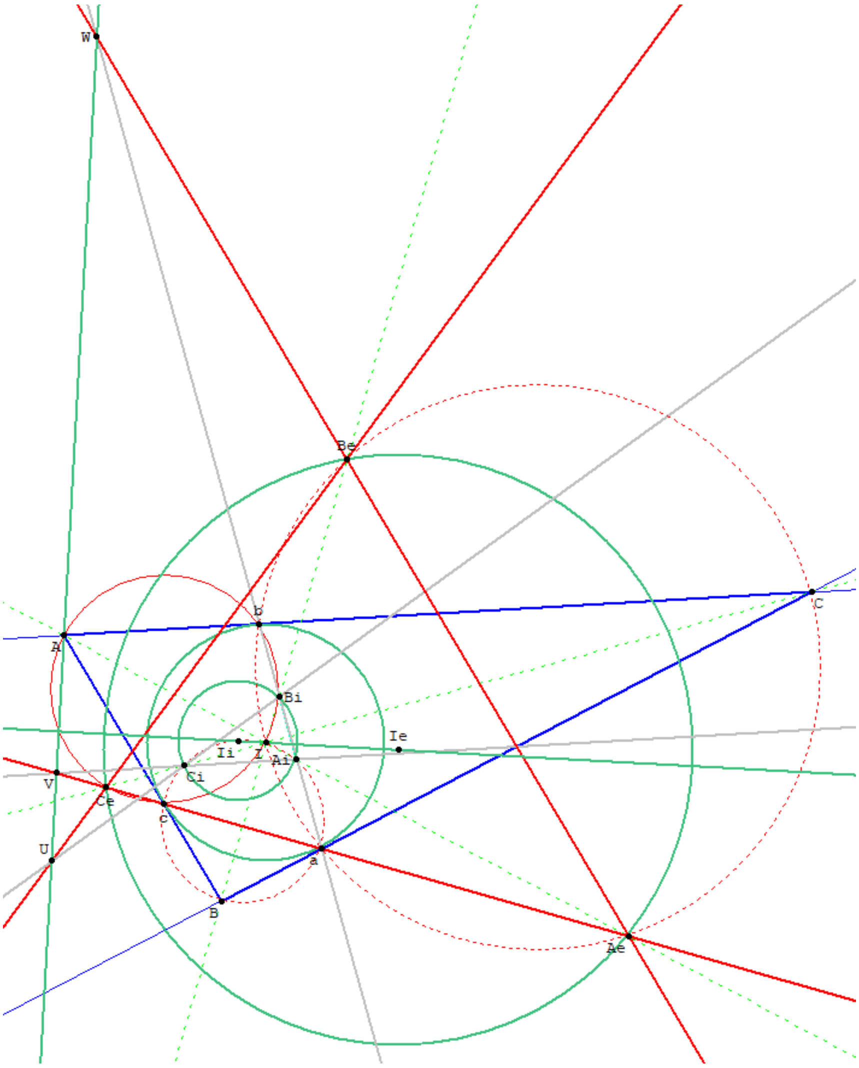

Figure 7

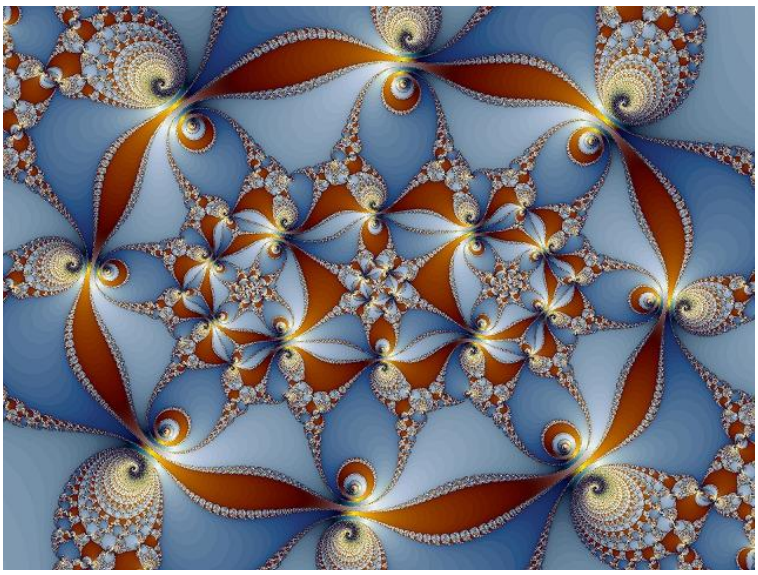

Image Sylvie Gallet