PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

Les candidats sont avertis qu'il sera tenu compte, lors de la correction, de la précision de leurs arguments et de la présentation de leur copie. Ils sont invités à lire très attentivement l'énoncé.

Les parties I, II et III du problème sont indépendantes.

NOTATIONS : On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$) et de la norme associée. On identifie les endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ aux matrices de $M_n(\mathbf{R})$. On note 1_n la matrice unité de $M_n(\mathbf{R})$. Si $A \in M_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n$, on note Ax l'image de x par A.

Le but du problème est de démontrer l'énoncé (E) suivant :

(E) Soient $n \geqslant 1$ un entier, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, et $M : I \to M_n(\mathbf{R})$ une application de classe C^1 telle que pour tout $t \in I$ la matrice $M(t)$ soit symétrique. Il existe alors n applications $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de classe C^1 de I dans $\mathbf{R}$ telles que le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit $\prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j(t))$ pour tout $t \in I$.

I. Exemples et contre-exemples

1° Montrer que l'énoncé obtenu en remplaçant l'hypothèse « $M(t)$ est symétrique », par « $M(t)$ est diagonalisable » dans (E) est faux. (On pourra considérer l'application $M : \mathbf{R} \to M_2(\mathbf{R})$ définie par

$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} 0 & t^3\left(2 + \sin \frac{1}{t}\right)^2 \\ t & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{si} \quad t \neq 0.)$$

2° Montrer que sous les hypothèses de (E) il n'existe pas en général d'application continue $e : I \to \mathbf{R}^n$ telle que $e(t)$ soit un vecteur propre non nul de $M(t)$ pour tout $t \in I$.

3° Montrer que (E) implique le résultat suivant : pour toute suite finie $f_1, \dots, f_m$ d'applications de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, il existe une application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $g^2 = f_1^2 + \dots + f_m^2$.

$$f(0) = 0, \qquad f(t) = t^8 \sin \frac{1}{t} \qquad \text{si} \quad t \neq 0,$$

est de classe C^2, et qu'il n'existe aucune application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 telle que $g^2(t) = t^{14} + f^2(t)$.

5° Montrer que, même si l'on suppose dans l'énoncé (E) l'application M de classe C^2, il n'est pas possible en général de trouver des fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ satisfaisant aux conclusions de (E) et qui soient de classe C^2.

II. Prolongement en un point

Dans cette partie, a et b sont des nombres réels tels que $a < b$, n un entier $\geqslant 1$, $M : [a, b[\to M_n(\mathbf{R})$ et $\lambda :]a, b[\to \mathbf{R}$ des applications continues. On suppose que la matrice $M(t)$ est symétrique pour tout $t \in [a, b[$, et que $\lambda(t)$ est une valeur propre de $M(t)$ pour tout $t \in]a, b[$.

1° Montrer que λ admet un prolongement continu au point a. On pose $\lambda(a) = \lim_{\substack{t \to a \\ a < t < b}} \lambda(t)$. Est-ce que $\lambda(a)$ est valeur propre de $M(a)$?

2° Montrer que $\mathbf{R}^n$ est somme directe orthogonale du noyau N et de l'image L de $M(a) - \lambda(a) 1_n$.

Étant donné $x \in \mathbf{R}^n$, on notera dans la suite x_N et x_L les éléments de N et L tels que $x = x_N + x_L$.

3° Supposons que M admette en a une dérivée à droite $M'_d(a)$. Montrer que λ admet en a une dérivée à droite $\lambda'_d(a)$, et que $\lambda'_d(a)$ est valeur propre de l'endomorphisme $x \longmapsto (M'_d(a)\, x)_N$ de l'espace vectoriel N.

(On pourra remarquer que, si $(t_m)_{m \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $]a, b[$ tendant vers a, et si pour tout $m \geqslant 1$ on choisit un vecteur propre $e(t_m)$ de norme 1 de $M(t_m)$ relatif à la valeur propre $\lambda(t_m)$, une sous-suite de la suite $(e(t_m))_{m \geqslant 1}$ est convergente.)

4° Supposons que M admette en tout point t de $[a, b[$ une dérivée à droite $M'_d(t)$ et que l'on ait $M'_d(a) = \lim_{\substack{t \to a \\ a < t < b}} M'_d(t)$.

a. Soit $t \in [a, b[$. Montrer que λ admet en t une dérivée à droite $\lambda'_d(t)$ et qu'il existe $e(t) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\| e(t) \| = 1$, $M(t)\, e(t) = \lambda(t)\, e(t)$ et $< e(t) \mid M'_d(t)\, e(t) > = \lambda'_d(t)$.

b. Montrer que l'on a $\lambda'_d(a) = \lim_{\substack{t \to a \\ a < t < b}} \lambda'_d(t)$.

Tournez la page S. V. P.

III. Séparation de valeurs propres

Dans cette partie, I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, n un entier $\geqslant 1$, $M : I \to M_n(\mathbf{R})$ une application de classe C^1 et a un point de I. On suppose que le polynôme caractéristique de $M(a)$ est produit de deux polynômes unitaires Q et R, étrangers (c'est-à-dire dont le p.g.c.d. est 1), et à coefficients réels.

1° Montrer qu'il existe un voisinage I_1 de a dans I, et pour tout $t \in I_1$ des polynômes unitaires Q_t et R_t de mêmes degrés respectivement que Q et R, à coefficients réels, et tels que :

— on ait $Q_a = Q$ et $R_a = R$;

— les coefficients de Q_t et R_t soient des fonctions de classe C^1 de t sur I_1;

— pour tout $t \in I_1$, le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit égal à $Q_t R_t$.

(On pourra se servir du théorème d'inversion locale.)

2° Montrer qu'il existe un voisinage I_2 de a dans I_1 tel que les polynômes Q_t et R_t soient étrangers pour tout $t \in I_2$.

Soit $t \in I_2$. Notons F_t et G_t les images des endomorphismes $Q_t(M(t))$ et $R_t(M(t))$ de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est somme directe de F_t et G_t, et que F_t et G_t sont stables par $M(t)$.

3° Montrer qu'il existe un voisinage I_3 de a dans I_2, un entier m compris entre 0 et n, et n applications $e_1, \dots, e_n$ de classe C^1 de I_3 dans $\mathbf{R}^n$ telles que pour tout $t \in I_3$, les vecteurs $e_1(t), \dots, e_m(t)$ forment une base de F_t et les vecteurs $e_{m+1}(t), \dots, e_n(t)$ forment une base de G_t.

4° Lorsque les matrices $M(t)$, pour $t \in I$, sont symétriques, montrer que les applications $e_1, \dots, e_n$ de la question 3° peuvent être choisies de sorte qu'en outre $e_1(t), \dots, e_n(t)$ soit une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ quel que soit $t \in I_3$.

Montrer qu'alors les endomorphismes de F_t et G_t induits par $M(t)$ sont représentés dans les bases $e_1(t), \dots, e_m(t)$ et $e_{m+1}(t), \dots, e_n(t)$ par des matrices symétriques, et que celles-ci sont des fonctions de classe C^1 de t sur I_3.

IV. Démonstration de l'énoncé (E)

Nous démontrerons l'énoncé (E) par récurrence sur n. Vérifier que le cas $n = 1$ est immédiat. On supposera donc $n \geqslant 2$ et on admettra dans ce qui suit l'énoncé (E) relatif aux entiers $n' < n$.

On considère un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ et une application $M : I \to M_n(\mathbf{R})$ de classe C^1 telle que $M(t)$ soit une matrice symétrique pour tout $t \in I$.

Étant donné une partie ouverte U de I, on note $\Lambda(U)$ l'ensemble des n-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ d'applications de classe C^1 de U dans $\mathbf{R}$ tels que, quel que soit $t \in U$, le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit égal à $\prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j(t))$.

1° Soit $a \in I$ tel que $M(a)$ ait au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage J de a dans I tel que $\Lambda(J)$ soit non vide.

2° Soient a, b dans I, avec $a < b$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda(]a, b[)$. On sait d'après II que les couples $(\lambda_j(t), \lambda'_j(t))$ ont des limites lorsque $t \in]a, b[$ tend vers a. Comment peut-on décrire les n couples limites en termes de $M(a)$ et de $M'(a)$?

Application numérique au cas où $I = \mathbf{R}$, $a = 0$, et $M(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & t & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3° Soient a, b, c dans I avec $a < b < c$, et soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda(]a, b[)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Lambda(]b, c[)$. Montrer qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et un élément de $\Lambda(]a, c[)$ dont la restriction à $]a, b[$ est $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et dont la restriction à $]b, c[$ est $(\mu_{\sigma(1)}, \dots, \mu_{\sigma(n)})$.

4° Soit U une partie ouverte de I. Montrer que si tout point t de U possède un voisinage J_t dans I tel que $\Lambda(J_t) \neq \varnothing$, alors $\Lambda(U)$ est non vide. (On pourra commencer par traiter le cas où U est un intervalle.)

5° Soit $a \in I$. Supposons que la matrice $M(a)$ soit celle d'une homothétie et que $M'(a)$ ait au moins deux valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe un voisinage J de a dans I tel que $\Lambda(J)$ soit non vide.

6° Montrer que l'ensemble F des $a \in I$ tels que $M(a)$ et $M'(a)$ soient les matrices d'homothéties, est une partie fermée de I, et que $\Lambda(I - F)$ est non vide.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda(I - F)$. On prolonge les applications λ_j à I en définissant $\lambda_j(t)$, pour $t \in F$, comme l'unique valeur propre de $M(t)$. Montrer que les applications ainsi prolongées sont continues sur I, puis qu'elles satisfont aux conclusions de (E).