Preuve élémentaire du Théorème de Fermat-Wiles

par Ahmed Idrissi Bouyahyaoui

***

Théorème de Fermat-Wiles :

(1) « L'égalité $x^n+y^n=z^n$, où n, x, y, z $\in \mathbb{N}^+$, est impossible pour n>2. »

***

Résumé :

Dans la division euclidienne de $x^n = z^n - y^n$ par $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$, le reste doit être égal à zéro impliquant l'égalité $b^2y^{n-2} = a^2z^{n-2}$ qui est impossible pour n>2 puisque $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ et x, y, z sont des nombres premiers entre eux.

***

On suppose x, y et z sont des nombres premiers entre eux.

Etant donnés pgcd(y,z)=1 et le corollaire du théorème de Bachet (1624), il existe deux entiers relatifs a et b tels que

(2) $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$

La division euclidienne $(z^n - y^n) : (az^{n-1} - by^{n-1})$ $(= x^n : x^{n-1} = x)$ doit avoir un reste nul.

Posons la division euclidienne :

$$
\begin{array}{lll}
 & z^n \;-\; y^n & \Big|\; az^{n-1} - by^{n-1} \\
 & & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & - z^n + (b/a)zy^{n-1} & x = \;\; z/a \;+\; y/b \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad} & \qquad\;\; - z/a \;-\; y/b \\
 & - y^n + (b/a)zy^{n-1} & \\
 & + y^n - (a/b)yz^{n-1} & \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad} & \\
R_1 = & (b/a)zy^{n-1} - (a/b)yz^{n-1} & \\
 & - (b/a)zy^{n-1} + z^n & \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad} & \\
R_2 = & z^n - (a/b)yz^{n-1} & \\
 & \quad + (a/b)yz^{n-1} - y^n & \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad} & \\
R_3 = & z^n \;-\; y^n \neq 0\,; & y, z \in \mathbb{N}^+ \text{ et pgcd}(y,z)=1
\end{array}
$$

Si le reste R_2 est nul alors le quotient x = z/a + y/b - z/a = y/b, soit bx = y, ce qui est impossible puisque pgcd(x,y)=1 . Donc seul le reste R_1 doit être nul :

(3) $R_1 = (b/a)zy^{n-1} - (a/b)yz^{n-1} = ((b/a)y^{n-2} - (a/b)z^{n-2})yz = 0$

Soit $(b/a)y^{n-2} - (a/b)z^{n-2} = 0$ ce qui implique l'égalité :

(4) $b^2\, y^{n-2} = a^2\, z^{n-2}$

où, pour n>2, comme pgcd(y,z)=1, y divise a^2 et z divise b^2, et par suite, d'après l'égalité $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$, pgcd(x,y) >1 et pgcd(x,z) >1, mais pgcd(x,y) = pgcd(x,z) =1 par hypothèse. Par conséquent, les égalités $b^2y^{n-2} - a^2z^{n-2} = 0$ (R), $x^{n-1} = az^{n-1} - by^{n-1}$ (d), $x^n = z^n - y^n$ (D) sont impossibles pour n>2.

ahmed.idrissi@free.fr

INPI – Paris