Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Formation d'une fonction* $F(x)$ *possédant la propriété* $F[\varphi(x)] = F(x)$. Note de M. **Appell**, présentée par M. Bouquet.

« Je me propose de généraliser le mode de représentation analytique des fonctions périodiques et de montrer comment on peut former une fonction $F(x)$ possédant la propriété exprimée par l'équation

$$(1) \qquad F[\varphi(x)] = F(x),$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction donnée.

» Soit $\varphi_{-1}(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$, et posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi_n(x) = \varphi\{\varphi[\ldots, \varphi(x)]\},$$
$$\varphi_{-n}(x) = \varphi_{-1}\{\varphi_{-1}[\ldots, \varphi_{-1}(x)]\},$$

les symboles fonctionnels φ et φ_{-1} étant employés n fois dans les seconds membres. Considérons en outre une fonction rationnelle $f(u)$ d'une variable u et formons la série

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[\varphi_n(x)],$$

$f[\varphi_n(x)]$ étant ce que devient $f(u)$ quand on y remplace u par $\varphi_n(x)$. Si cette série (2) est convergente, elle définit une fonction $F(x)$ qui possède la propriété (1) et par suite aussi la propriété

$$(3) \qquad F[\varphi_{-1}(x)] = F(x).$$

» *Exemples.* — Je vais d'abord appliquer cette méthode à un cas simple, en me proposant de former une fonction $F(x)$ telle que $F(x^2) = F(x)$, quoique, par un simple changement de variables, on puisse former de pareilles fonctions à l'aide des fonctions périodiques. Dans le cas présent, on a

$$\varphi(x) = x^2, \quad \varphi_{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(x) = x^{2^n}, \quad \varphi_{-n}(x) = x^{2^{-n}}.$$

Prenons la fonction rationnelle $f(u)$ égale à

$$u^2(1-u)^2.$$

La série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{2^{n+1}}(1 - x^{2^n})^2$$

est convergente pour toute valeur de x dont le module est plus petit que l'unité, et l'on a

$$F(x^2) = F(x) = F(\sqrt{x}).$$

» Cette fonction $F(x)$ peut être composée à l'aide des deux fonctions plus simples

$$(4) \qquad \psi(x) = x^2 + x^4 + \ldots + x^{2^n} + \ldots,$$

$$(5) \qquad \psi_1(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right) + \ldots + \left(x^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) + \ldots;$$

on a, en effet,

$$F(x) = 2\left[x(1 - x^2) - \frac{3}{2} + \psi(x) - \psi(x^3) + \psi_1(x) - \psi_1(x^3)\right].$$

La fonction $\psi(x)$ est holomorphe dans l'intérieur du cercle de rayon égal a l'unité. La série (5) est convergente pour toutes les valeurs de la variable; elle définit une fonction $\psi_1(x)$ non uniforme, ayant un point critique à l'origine; on peut aussi développer cette fonction en une série procédant suivant les puissances du logarithme népérien de x :

$$\psi_1(x) = Lx + \frac{(Lx)^2}{1.2}\frac{1}{2^2 - 1} + \ldots + \frac{(Lx)^n}{1.2\ldots n}\frac{1}{2^n - 1} + \ldots.$$

» Pour donner un second exemple, je suppose $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi_{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$, et je ne considère que des valeurs réelles de la variable, en convenant de prendre la valeur réelle des radicaux cubiques. Soit a la racine positive de l'équation

$$(6) \qquad a^3 - a - 1 = 0;$$

prenons pour la fonction rationnelle $f(u)$ l'expression

$$f(u) = \frac{u - a}{u^2},$$

et formons la série

$$(7) \qquad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\varphi_n(x) - a}{[\varphi_n(x)]^2}.$$

» Cette série est convergente pour toutes les valeurs de la variable, à l'exception de certaines valeurs particulières qui rendent infini un des termes, comme, par exemple, 0, 1, ... La fonction $F(x)$ ainsi définie possède la propriété

$$F(x^3 - 1) = F(x) = F(\sqrt[3]{x+1}).$$

» Je vais démontrer la convergence de la série (7) en supposant la variable x plus grande que a; un raisonnement analogue s'appliquerait aux valeurs de x plus petites que a. Je remarque d'abord que $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n-1}(x)$ sont liés par la relation

$$\varphi_{n-1} = \sqrt[3]{\varphi_n + 1},$$

que n soit positif ou négatif. Posons

$$\varphi_n - a = u_n, \quad \sqrt[3]{a + 1 + u_n} = R_n;$$

la relation précédente devient

$$u_{n-1} = R_n - a$$

ou encore

$$u_{n-1} = \frac{R_n^3 - a^3}{R_n^2 + a R_n + a^2} = \frac{u_n}{R_n^2 + a R_n + a^2}.$$

» Cette relation montre d'abord que u_n et u_{n-1} sont de même signe; il en résulte qu'ils sont tous deux positifs, car $u_0 = x - a$ est supposé positif. Ensuite, comme la valeur minimum du dénominateur

$$R_n^2 + a R_n + a^2$$

est $\frac{3}{4} a^2$ et que la racine a est plus grande que $\frac{4}{3}$, on a

$$u_{n-1} < \frac{3}{4} u_n. \tag{8}$$

» Si alors je prends dans la série (7) les termes correspondant à des valeurs positives de u

$$F_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi_n - a}{\varphi_n^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_n}{(u_n + a)^2},$$

je vois que cette série est convergente, car la relation (8) donne

$$u_1 > \frac{4}{3} u_0, \quad u_2 > \frac{4}{3} u_1, \quad \ldots, \quad u_n > \frac{4}{3} u_{n-1},$$

d'où

$$u_n > \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0.$$

» De même, si je prends dans la série (7) les termes correspondant à des valeurs négatives de n

$$F_2 = \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \frac{\varphi_n - a}{\varphi_n^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_{-n}}{(u_{-n} + a)^2},$$

j'obtiens une série convergente, car la relation (8) donne, par le changement de n en $-n$,

$$u_{-n-1} < \frac{3}{4} u_{-n},$$

d'où

$$u_{-1} < \frac{3}{4} u_0, \quad u_{-2} < \frac{3}{4} u_1, \quad \ldots,$$

et par suite

$$u_{-n} < \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0.$$

» La série $F = F_1 + F_2$ est donc convergente. »

HISTOIRE DE LA CHIMIE. — *Lettre à M. Dumas sur les appareils de Lavoisier;* par M. P. Truchot.

« Les savants qui visitent les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers, à Paris, peuvent voir réunis une dizaine d'instruments ayant servi à Lavoisier, et dont les principaux se rapportent à la synthèse de l'eau et à la calorimétrie.

» Mais ce n'est pas tout ce qui reste des appareils ayant servi au créateur de la Chimie; vous apprendrez avec intérêt qu'il existe encore de nombreuses et précieuses reliques de ce savant; je me propose de les faire connaître et je demande la permission de vous les signaler, en attendant une description plus complète.

» Le laboratoire de Chimie et le cabinet de Physique ont été pieusement conservés par la famille de Mme de Lavoisier, et je dois à M. E. de Chazelles, qui en est actuellement l'heureux possesseur, le plaisir d'avoir pu en prendre connaissance et en dresser l'inventaire, à la Canière, près d'Aigueperse (Puy-de-Dôme), où se trouve également le portrait de Lavoisier peint par David.

» Il y a là, en grand nombre, de simples tubes, des appareils vulgaires; mais ce sont des outils qui ont servi à Lavoisier : chacun d'eux peut rappeler une découverte remarquable, une recherche importante. Il y a plus : il y a surtout des appareils du plus haut intérêt.