

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1879-01-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Formation d'une fonction $F(x)$ possédant la propriété $F[\varphi(x)] = F(x)$.* Note de M. APPELL, présentée par M. Bouquet.

« Je me propose de généraliser le mode de représentation analytique des fonctions périodiques et de montrer comment on peut former une fonction $F(x)$ possédant la propriété exprimée par l'équation

$$(1) \quad F[\varphi(x)] = F(x),$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction donnée.

» Soit $\varphi_{-1}(x)$ la fonction inverse de $\varphi(x)$, et posons, pour simplifier l'écriture,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \varphi\{\varphi[\dots, \varphi(x)]\}, \\ \varphi_{-n}(x) &= \varphi_{-1}\{\varphi_{-1}[\dots, \varphi_{-1}(x)]\}, \end{aligned}$$

les symboles fonctionnels φ et φ_{-1} étant employés n fois dans les seconds membres. Considérons en outre une fonction rationnelle $f(u)$ d'une variable u et formons la série

$$(2) \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f[\varphi_n(x)],$$

$f[\varphi_n(x)]$ étant ce que devient $f(u)$ quand on y remplace u par $\varphi_n(x)$. Si cette série (2) est convergente, elle définit une fonction $F(x)$ qui possède la propriété (1) et par suite aussi la propriété

$$(3) \quad F[\varphi_{-1}(x)] = F(x).$$

» *Exemples.* — Je vais d'abord appliquer cette méthode à un cas simple, en me proposant de former une fonction $F(x)$ telle que $F(x^2) = F(x)$, quoique, par un simple changement de variables, on puisse former de pareilles fonctions à l'aide des fonctions périodiques. Dans le cas présent, on a

$$\varphi(x) = x^2, \quad \varphi_{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(x) = x^{2^n}, \quad \varphi_{-n}(x) = x^{2^{-n}}.$$

Prenons la fonction rationnelle $f(u)$ égale à

$$u^2(1-u)^2.$$

La série

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^{2^{n+1}}(1-x^{2^n})^2$$

est convergente pour toute valeur de x dont le module est plus petit que l'unité, et l'on a

$$F(x^2) = F(x) = F(\sqrt{x}).$$

» Cette fonction $F(x)$ peut être composée à l'aide des deux fonctions plus simples

$$(4) \quad \psi(x) = x^2 + x^4 + \dots + x^{2^n} + \dots,$$

$$(5) \quad \psi_1(x) = \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) + \left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right) + \dots + \left(x^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) + \dots;$$

on a, en effet,

$$F(x) = 2 \left[x(1 - x^2) - \frac{3}{2} + \psi(x) - \psi(x^3) + \psi_1(x) - \psi_1(x^3) \right].$$

La fonction $\psi(x)$ est holomorphe dans l'intérieur du cercle de rayon égal à l'unité. La série (5) est convergente pour toutes les valeurs de la variable; elle définit une fonction $\psi_1(x)$ non uniforme, ayant un point critique à l'origine; on peut aussi développer cette fonction en une série procédant suivant les puissances du logarithme népérien de x :

$$\psi_1(x) = Lx + \frac{(Lx)^2}{1.2} \frac{1}{2^2 - 1} + \dots + \frac{(Lx)^n}{1.2 \dots n} \frac{1}{2^n - 1} + \dots$$

» Pour donner un second exemple, je suppose $\varphi(x) = x^3 - 1$, $\varphi_{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$, et je ne considère que des valeurs réelles de la variable, en convenant de prendre la valeur réelle des radicaux cubiques. Soit a la racine positive de l'équation

$$(6) \quad a^3 - a - 1 = 0;$$

prenons pour la fonction rationnelle $f(u)$ l'expression

$$f(u) = \frac{u - a}{u^2},$$

et formons la série

$$(7) \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\varphi_n(x) - a}{[\varphi_n(x)]^2}.$$

» Cette série est convergente pour toutes les valeurs de la variable, à l'exception de certaines valeurs particulières qui rendent infini un des termes, comme, par exemple, 0, 1, La fonction $F(x)$ ainsi définie

possède la propriété

$$F(x^3 - 1) = F(x) = F(\sqrt[3]{x+1}).$$

» Je vais démontrer la convergence de la série (7) en supposant la variable x plus grande que a ; un raisonnement analogue s'appliquerait aux valeurs de x plus petites que a . Je remarque d'abord que $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n-1}(x)$ sont liés par la relation

$$\varphi_{n-1} = \sqrt[3]{\varphi_n + 1},$$

que n soit positif ou négatif. Posons

$$\varphi_n - a = u_n, \quad \sqrt[3]{a + 1 + u_n} = R_n;$$

la relation précédente devient

$$u_{n-1} = R_n - a$$

ou encore

$$u_{n-1} = \frac{R_n^3 - a^3}{R_n^2 + aR_n + a^2} = \frac{u_n}{R_n^2 + aR_n + a^2}.$$

» Cette relation montre d'abord que u_n et u_{n-1} sont de même signe; il en résulte qu'ils sont tous deux positifs, car $u_0 = x - a$ est supposé positif. Ensuite, comme la valeur minimum du dénominateur

$$R_n^2 + aR_n + a^2$$

est $\frac{3}{4}a^2$ et que la racine a est plus grande que $\frac{4}{3}$, on a

$$(8) \quad u_{n-1} < \frac{3}{4}u_n.$$

» Si alors je prends dans la série (7) les termes correspondant à des valeurs positives de u

$$F_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi_n - a}{\varphi_n^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u_n}{(u_n + a)^2},$$

je vois que cette série est convergente, car la relation (8) donne

$$u_1 > \frac{4}{3}u_0, \quad u_2 > \frac{4}{3}u_1, \quad \dots, \quad u_n > \frac{4}{3}u_{n-1},$$

d'où

$$u_n > \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0.$$

» De même, si je prends dans la série (7) les termes correspondant à

des valeurs négatives de n

$$F_2 = \sum_{n=-1}^{n=-\infty} \frac{\varphi_n - a}{\varphi_n^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_{-n}}{(u_{-n} + a)^2},$$

j'obtiens une série convergente, car la relation (8) donne, par le changement de n en $-n$,

$$u_{-n-1} < \frac{3}{4} u_{-n},$$

d'où

$$u_{-1} < \frac{3}{4} u_0, \quad u_{-2} < \frac{3}{4} u_1, \quad \dots,$$

et par suite

$$u_{-n} < \left(\frac{3}{4}\right)^n u_0.$$

» La série $F = F_1 + F_2$ est donc convergente. »

HISTOIRE DE LA CHIMIE. — *Lettre à M. Dumas sur les appareils de Lavoisier;*
par M. P. TRUCHOT.

« Les savants qui visitent les galeries du Conservatoire des Arts et Métiers, à Paris, peuvent voir réunis une dizaine d'instruments ayant servi à Lavoisier, et dont les principaux se rapportent à la synthèse de l'eau et à la calorimétrie.

» Mais ce n'est pas tout ce qui reste des appareils ayant servi au créateur de la Chimie; vous apprendrez avec intérêt qu'il existe encore de nombreuses et précieuses reliques de ce savant; je me propose de les faire connaître et je demande la permission de vous les signaler, en attendant une description plus complète.

» Le laboratoire de Chimie et le cabinet de Physique ont été pieusement conservés par la famille de M^{me} de Lavoisier, et je dois à M. E. de Chazelles, qui en est actuellement l'heureux possesseur, le plaisir d'avoir pu en prendre connaissance et en dresser l'inventaire, à la Canière, près d'Aigueperse (Puy-de-Dôme), où se trouve également le portrait de Lavoisier peint par David.

» Il y a là, en grand nombre, de simples tubes, des appareils vulgaires; mais ce sont des outils qui ont servi à Lavoisier: chacun d'eux peut rappeler une découverte remarquable, une recherche importante. Il y a plus: il y a surtout des appareils du plus haut intérêt.