Problème Diophante D1759

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB] sont notés a, b, c.
Soient A_1 et A_2 les points à distance a de A, sur les demi-droites issues de A contenant B et C respectivement.
Soient B_1 et B_2 les points à distance b de B, sur les demi-droites issues de B contenant C et A respectivement.
Soient C_1 et C_2 les points à distance c de C, sur les demi-droites issues de C contenant A et B respectivement.
Montrer que les trois droites $[A_1C_2]$,$[B_1A_2]$ et $[C_1B_2]$ sont concourantes.
Quel est le point de concours ?

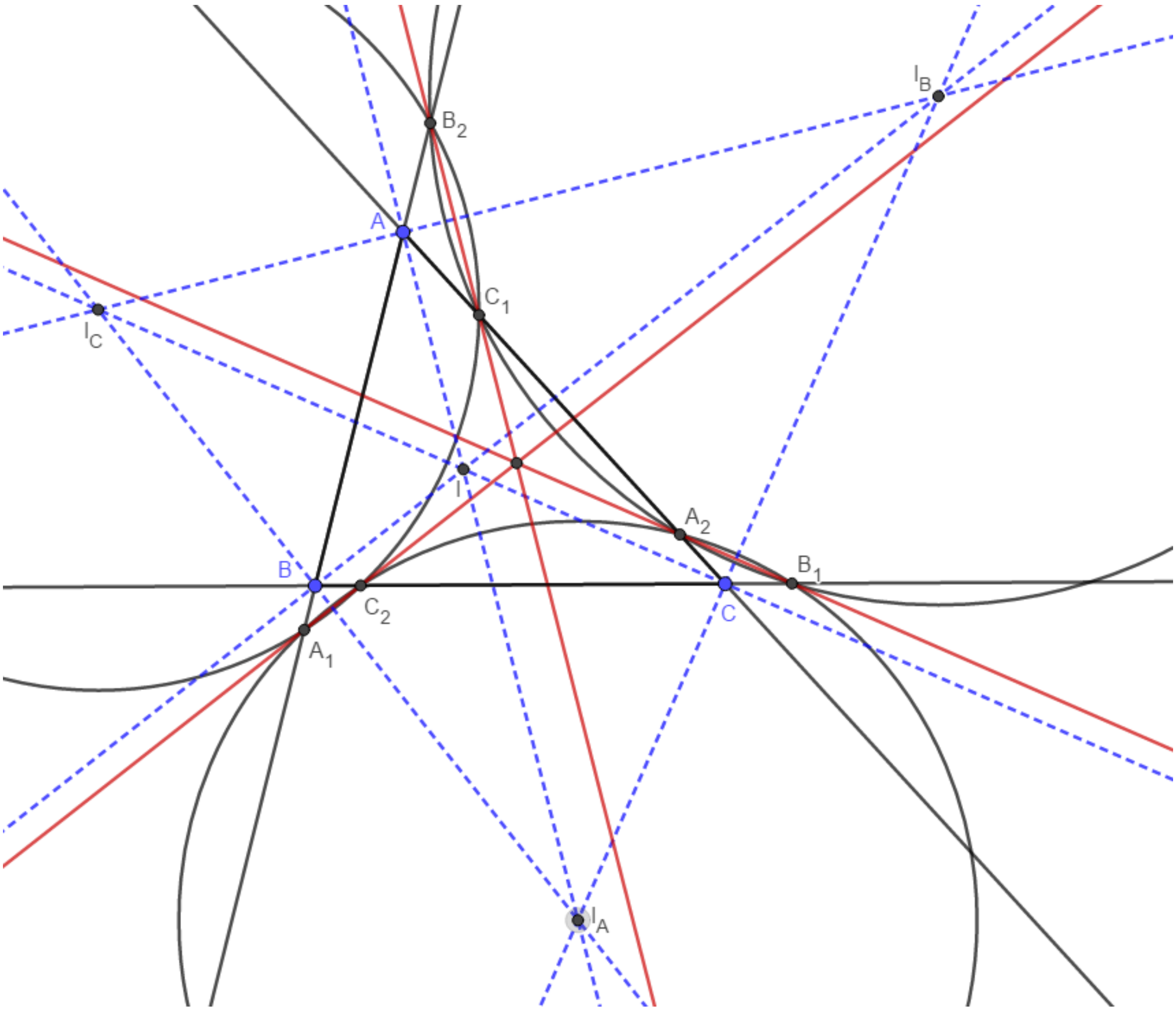
Solution de Jean-Louis Breuil

Par hypothèse : $[AA_1] = [AA_2] = a$, $[BB_1] = [BB_2] = b$, $[CC_1] = [CC_2] = c$

Donc : $[BA_1] = [AA_1] - [AB] = a - c$, et $[BC_2] = [BC] - [CC_2] = a - c$:

le triangle A_1BC_2 est isocèle, d'angle au sommet en B.

De même, les triangles B_1CA_2 et C_1AB_2 sont isocèles, respectivement en C et A.



Il s'ensuit que les médiatrices des segments A_1C_2, B_1A_2 et C_1B_2 sont les bissectrices extérieures respectives des angles en B, C et A du triangle ABC. Leurs trois points de concours sont donc les centres I_A, I_B et I_C des cercles exinscrits au triangle ABC, et puisque ce sont les médiatrices des segments A_1C_2, B_1A_2 et C_1B_2, viennent immédiatement les égalités $[I_AA_1] = [I_AC_2]$, $[I_BB_1] = [I_BA_2]$ et $[I_CC_1] = [I_CB_2]$.
Or, par hypothèse, $[AA_1] = [AA_2]$, le triangle A_1AA_2 est donc isocèle, et la médiatrice de A_1A_2 est aussi la bissectrice de l'angle en A, c'est-à-dire la bissectrice intérieure de ABC, qui passe par le centre I_A : donc, $[I_AA_1] = [I_AA_2]$; en outre, puisque la bissectrice extérieure I_AI_B de l'angle en C du triangle ABC est la médiatrice du segment B_1A_2, il vient $[I_AB_1] = [I_AC_2]$: on obtient finalement $[I_AA_1] = [I_AC_2] = [I_AA_2] = [I_AB_1]$, et les quatre points A_1, C_2, A_2 et B_1 appartiennent donc à un même cercle de centre I_A.
Mutatis mutandis, on montre de même que les quatre points B_1, A_2, C_1 et B_2 appartiennent à un même cercle de centre I_B, et que les quatre points B_2, C_1, C_2 et A_1 appartiennent à un même cercle de centre I_C.
Par conséquent, la droite A_1C_2 est l'axe radical des deux cercles de centres I_C et I_A, la droite B_1A_2 est l'axe radical des deux cercles de centres I_A et I_B, et la droite C_1B_2 est l'axe radical des deux cercles de centres I_B et I_C. Et ces trois axes radicaux sont concourants, en le point qui est le centre radical de ces trois cercles.
Mais que ce centre radical soit le point de Nagel du triangle ABC, ce que la figure ci-dessous indique, je suis bien en peine de le démontrer ...