

الصفحة 1 5 **	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>المسالك الدولية</b> <b>الدورة الاستعدادية 2022</b> <b>- الموضوع -</b>		المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات
↔	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS	RS 24F	
4	مدة الإجابة	الرياضيات	المادة
9	المعامل	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب - خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
  
- L'exercice1 se rapporte à l'analyse .....(10 pts)
- L'exercice2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'exercice3 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé  
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

## EXERCICE 1, (10 points)

0.25 A-1- Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + x \leq e^x$

0.25 2-a) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$

0.5 c) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

B- On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0, +\infty[$  par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in ]0, +\infty[) ; f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

Et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ 

0.5 1-a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que :  $(\forall x > 0) ; \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1 - 2x - e^{-2x}}{x^2} - \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2}$

0.5 c) En déduire que  $f$  est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est  $\left(-\frac{3}{2}\right)$

0.5 2-a) Montrer que :  $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - e^x (1 + x))$

0.5 b) Montrer que :  $(\forall x > 0) ; f'(x) \leq -e^{-2x}$   
(On pourra utiliser :  $1 + x \leq e^x$ )

0.25 c) En déduire le sens de variations de  $f$  sur  $I$

3- On admet que :  $(\forall x > 0) ; f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3} (-4x^2 - 4x - 2 + e^x (2 + 2x + x^2))$

0.25 a) Montrer que :  $(\forall x \geq 0) ; 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall x > 0) ; f''(x) > 0$

4- On admet que :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$

0.5 a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$

- 0.5 5-a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25 b) Dresser le tableau de variations de  $f$
- 0.25 c) Déterminer la position relative de la courbe  $(C)$  par rapport à sa demi-tangente au point  $T(0;1)$
- 0.5 d) Représenter graphiquement la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

C-1- Pour tout  $x$  de  $[0;1]$ , on pose :  $g(x) = f(x) - x$

- 0.5 a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $[0;1]$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera.
- 0.5 b) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in ]0;1[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$

2- Pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout entier  $k \in \{0;1,\dots,n\}$ , on

considère les nombres réels  $x_k = \frac{k\alpha}{n}$  et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt$$

- 0.5 a) Montrer que :  $\forall k \in \{0;1,\dots,n\}$  ;  $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$
- 0.5 b) En déduire que :  $\forall k \in \{0;1,\dots,n\}$  ;  $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$

3- On pose :  $L = \int_0^\alpha f(t) dt$

- 0.5 a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{n}$
- 0.25 b) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^\alpha f(t) dt$

### EXERCICE2 (3.5 points)

Soit  $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1;0;1\}$

I- On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_m)$  d'inconnue  $z$  :

$$(E_m): \quad mz^2 - (m-1)^2z - (m-1)^2 = 0$$

- 0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation  $(E_m)$  est :  $\Delta = (m^2 - 1)^2$
- 0.5 b) Déterminer  $z_1$  et  $z_2$  les deux solutions de l'équation  $(E_m)$

0.5

2) On prend uniquement dans cette question  $m = e^{i\theta}$ , avec  $0 < \theta < \pi$

Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les deux points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $m - 1$  et  $\frac{1}{m} - 1$

0.5

1- Montrer que les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés si et seulement si  $m \in \mathbb{R}$

2- On suppose que  $m$  n'est pas un nombre réel.

Soient  $C$  l'image du point  $B$  par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $D$  l'image du

point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

et soient  $P(p)$ ,  $Q(q)$  et  $R(r)$  les milieux respectifs des segments  $[AC]$ ,  $[AD]$  et  $[OB]$

0.5

a) Montrer que l'affixe du point  $C$  est,  $c = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$

et que l'affixe du point  $D$  est,  $d = (m - 1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5

b) Montrer que,  $2(p - r) = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right)$

$$\text{et } 2(q - r) = (m - 1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m\right)$$

0.25

c) Montrer que,  $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p - r)$

0.5

d) Quelle est la nature du triangle  $PQR$ ? (justifier votre réponse)

### EXERCICE 3 : (3.5 points)

On rappelle que  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire non commutatif et non intègre

d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (La loi  $\times$  étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel  $a$  on pose  $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

et soit  $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$

1- Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $M_3(\mathbb{R})$  définie par ,  $(\forall a \in \mathbb{R}) ; \varphi(a) = M(a)$

- 0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
- 0.5 b) Montrer que  $\varphi(\mathbb{R}) = G$  , en déduire que  $(G, \times)$  est un groupe commutatif.
- 0.5 c) Déterminer  $J$  l'élément neutre dans  $(G, \times)$
- 0.5 d) Déterminer l'inverse de  $M(a)$  dans  $(G, \times)$
- 0.5 e) Résoudre dans  $(G, \times)$  l'équation :  $M(1) \times X = M(2)$

0.25 2-a) Montrer que :  $(\forall a \in \mathbb{R}) ; M(a) \times J = M(a) \times I$

0.5 b) En déduire que pour tout  $a \in \mathbb{R}$  ,  $M(a)$  n'est pas inversible dans  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.25 c) Vérifier que les matrices de la forme  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $x \in \mathbb{R}$  , sont

des solutions dans  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$  de l'équation :  $M(1) \times X = M(2)$

#### EXERCICE4 (3 points)

- 0.5 1- Montrer que 137 est un nombre premier.
- 0.5 2- Déterminer un couple  $(u, v)$  de  $\mathbb{Z}^2$  tel que :  $38u + 136v = 2$
- 3- Soit  $x \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x^{38} \equiv 1 [137]$
- 0.5 a) Montrer que  $x$  et 137 sont premiers entre eux.
- 0.5 b) Montrer que :  $x^{136} \equiv 1 [137]$
- 0.5 c) Montrer que :  $x^2 \equiv 1 [137]$
- 0.5 4- Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation (E):  $x^{19} \equiv 1 [137]$

FIN