EXERCICE 1.

PARTIE I : FORMULE DE STIRLING

L'objectif de cette partie est de démontrer la formule de Stirling, notée $(\star)$ en question **5**.

Pour cela on considère la fonction f et la suite $(u_n)_n$ définies par :

$$\forall x \in [0\,,\,1]\,,\ f(x) = (2+x)\ln(1+x) - 2x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^{(n+\frac{1}{2})}}{n!\,e^n}$$

1/ a/ Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0\,,\,1]$, et calculer ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

b/ On admet que le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Déterminer ce développement limité, puis justifier l'équivalent suivant : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$.

2/ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \dfrac{n}{2} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

3/ En déduire l'équivalent suivant : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$?

Dans tout ce qui suit on note S_n les sommes partielles, et S_∞ la somme, de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{j+1}}{u_j}\right) \quad \text{et} \quad S_\infty = \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_{j+1}}{u_j}\right)$$

On pose enfin $C = \exp(S_\infty - 1)$.

4/ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ S_{n-1} = \ln(u_n) + 1$. En déduire : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} C$.

5/ Montrer alors la *formule de Stirling* qui donne un équivalent de $n!$ lorsque $n \to +\infty$:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{n}}{Ce^n} \qquad (\star)$$

6/ On considère le programme Python suivant, et le résultat qu'il affiche :

```
import numpy as np
import math as m
n=100
C=n**(n+1/2)/(m.factorial(n)*np.exp(n))
print("Résultat : ",1/(2*C**2))
```

```
Résultat : 3.146832
.
```

Expliquer ce que fait ce programme, puis conjecturer la valeur de C.

PARTIE II : CALCUL DE LA VALEUR DE C *MÉTHODE JOHN_JOHN + ASTUCE JLAPIN POUR* W_2

L'objectif de cette partie est de calculer la valeur de la constante C qui apparaît dans la formule de Stirling. Pour cela on considère la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_n = \int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} \mathrm{d}t$$

7/ *Résultats généraux sur la suite* (W_n)

a/ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

b/ Montrer que la suite (W_n) est décroissante et à termes strictement positifs.

c/ Tracer le graphe de la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ sur $[0\,,\,1]$; on sera attentif aux tangentes en 0 et en 1. En déduire, par un argument géométrique, que $W_2 = \frac{\pi}{4}$.

d/ Quelle valeur donner à W_0 de sorte que la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ reste valable si $n = 0$? Dans tout ce qui suit, on attribue cette valeur à W_0.

8/ *Première étude de* W_{2n}.

a/ Justifier l'égalité suivante, valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $(2n+1)(2n)! = \dfrac{(2n+2)!}{2n+2}$

b/ En raisonnant par récurrence, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

c/ À l'aide de la formule de Stirling ($\star$), en déduire l'équivalent suivant : $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C\pi}{\sqrt{2n}}$.

9/ *Seconde étude de* W_{2n}.

a/ Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.

b/ Justifier : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c/ Déduire des deux questions précédentes l'équivalent suivant : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Donner un équivalent similaire de W_{2n} lorsque $n \to +\infty$.

10/ Calculer finalement la valeur de la constante C.