Analyse de l'inégalité pour les écarts entre nombres premiers

Introduction

L'inégalité proposée pour les écarts entre les nombres premiers :

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n \quad \text{pour} \quad n \gg 1$$

soulève plusieurs questions intéressantes, notamment en ce qui concerne son lien avec la conjecture de Cramér et les propriétés asymptotiques des nombres premiers. Voici quelques pistes pour explorer cette inégalité en profondeur.

1 Comparaison asymptotique avec la conjecture de Cramér

La conjecture de Cramér affirme que les écarts entre les nombres premiers successifs devraient être asymptotiquement de l'ordre :

$$p_{n+1} - p_n = O((\ln p_n)^2).$$

En comparant la conjecture de Cramér avec la nouvelle inégalité, nous avons :

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n.$$

L'inégalité proposée ici, contrairement à la première forme ($p_{n+1} - p_n < \frac{p_n}{n \ln n}$), permet des écarts qui croissent un peu plus rapidement, à savoir de l'ordre de $\frac{p_n}{n} \ln n$, qui diminue plus lentement que $\frac{1}{\ln n}$ (comme dans la première inégalité).

Comparaison avec la conjecture de Cramér

La conjecture de Cramér propose que $p_{n+1} - p_n = O((\ln p_n)^2)$. Puisque $p_n \sim n \ln n$, cela signifie que $(\ln p_n)^2 \sim (\ln n)^2$, et donc, en comparaison :

- La conjecture de Cramér donne un écart qui croît de l'ordre de $(\ln n)^2$.

- L'inégalité que nous avons ici, $p_{n+1}-p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n$, devient pour $p_n \sim n \ln n$:
$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{n \ln n}{n} \ln n = (\ln n)^2.$$
- Cette estimation de l'écart est donc du même ordre que celle suggérée par la conjecture de Cramér. En d'autres termes, cette inégalité semble plus proche de la conjecture de Cramér, tout en étant peut-être une borne plus précise ou plus forte.

2 Analyse de l'inégalité proposée

L'inégalité

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n$$

implique que l'écart entre deux nombres premiers successifs ne dépasse pas $\frac{p_n}{n} \ln n$. Comme mentionné précédemment, $p_n \sim n \ln n$ pour de grandes valeurs de n, ce qui nous permet de réécrire cette inégalité comme suit :

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{n \ln n}{n} \ln n = (\ln n)^2.$$

Donc, l'écart entre deux nombres premiers successifs est asymptotiquement de l'ordre de $(\ln n)^2$, ce qui est précisément l'ordre de grandeur suggéré par la conjecture de Cramér.

3 Propriétés analytiques et vérification empirique

Nous devons maintenant examiner si cette inégalité est réaliste à grande échelle pour n grand. Il serait intéressant de vérifier empiriquement si les écarts entre les nombres premiers successifs respectent cette borne pour des valeurs de n de plus en plus grandes.

Les outils analytiques incluent l'utilisation de la fonction p_n pour estimer les bornes sur les écarts. En pratique, des études numériques montrent que bien que les écarts entre les nombres premiers deviennent plus grands à mesure que n croît, ils restent généralement dans un cadre de croissance comparable à $(\ln n)^2$.

4 Implications pour la distribution des nombres premiers

L'inégalité $p_{n+1} - p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n$ implique que les nombres premiers successifs sont de plus en plus proches les uns des autres à mesure que n devient grand, mais que leur écart croît selon une loi plus douce que dans l'inégalité précédente. Cela suggère que les nombres premiers sont en moyenne plus proches que dans l'hypothèse de la conjecture de Cramér, mais toujours avec un écart de l'ordre de $(\ln n)^2$.

Cette inégalité, en tant que borne asymptotique, pourrait avoir des conséquences intéressantes sur l'étude de la distribution des nombres premiers dans les grands intervalles. Par exemple, elle pourrait influencer les méthodes d'estimation de la densité des nombres premiers dans les intervalles de $[1, N]$ et fournir des résultats plus fins que la conjecture de Cramér.

Conclusion

L'inégalité

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{p_n}{n} \ln n$$

implique que les écarts entre les nombres premiers successifs croissent asymptotiquement à l'ordre de $(\ln n)^2$, ce qui est cohérent avec la conjecture de Cramér, mais sous une forme légèrement plus serrée. Cette inégalité pourrait fournir une borne utile pour la croissance des écarts entre les nombres premiers, particulièrement pour des valeurs très grandes de n, et pourrait également servir de point de départ pour des études empiriques sur la répartition des nombres premiers.