analogues à (2), où A est remplacé par le nombre D défini par la relation

$$D = A + B + C.$$

Le nombre t appartient à E, quels que soient x, y, z, appartenant à E; l'ensemble E est donc homogène.

Si l'on veut utiliser le système décimal, on écrira un nombre x sous la forme

$$x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

le nombre a étant un entier positif ou négatif, tandis que les chiffres décimaux $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont compris entre 0 et 9. On supposera qu'à chaque x appartenant à E correspond un entier A tel que, à tout nombre N aussi grand que l'on veut, on puisse faire correspondre un nombre B tel que, dans toute série de N chiffres décimaux consécutifs dont le rang est supérieur à B, il y ait au plus A — 1 chiffres différents de 0 et de 9 et au plus A suites de chiffres consécutifs, dont chacune est formée, soit exclusivement de 0, soit exclusivement de 9. On voit aisément que, si deux nombres x et y satisfont à cette condition avec la même valeur de A, les nombres $x+y$ et $x-y$ satisferont à la même condition avec la valeur 2A. On en conclut que l'ensemble E est bien homogène.

Les ensembles que nous avons définis sont de mesure nulle; la question reste ouverte de savoir si le continu peut être décomposé en un nombre fini ou en une infinité dénombrable d'ensembles homogènes égaux, qui ne pourraient être de mesure nulle si leur nombre est fini et ne seraient pas mesurables si leur infinité est dénombrable.

Je n'insisterai pas sur les généralisations que les résultats précédents permettraient d'apporter à ceux de la Note citée plus haut.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Les paradoxes de l'axiome du choix.* Note de M. Émile Borel.

J'ai déjà, à diverses reprises, attiré l'attention sur les conséquences paradoxales auxquelles conduit, au point de vue de la mesure des ensembles, l'application de l'axiome du choix. Les partisans de cet axiome ont objecté que l'on n'a pas le droit de parler de mesure pour les ensembles non mesurables. Je voudrais donc, à propos d'un exemple précis, et sans employer la notion de la mesure, indiquer les faits géométriques qui sont à l'origine de ces paradoxes.

Soit E l'ensemble des points situés entre 0 et 1. Décomposons E en sous-ensembles E_α tels que deux points α_1 et α_2 appartiennent à un même E_α dans le cas et dans le cas seulement où la différence $\alpha_1 - \alpha_2$ est un nombre rationnel. L'ensemble des E_α a la puissance du continu. Dans chacun des E_α choisissons un élément distingué α (*axiome du choix*); l'ensemble des α forme un ensemble F_0 que j'appelle ensemble mal défini. A chaque nombre rationnel a compris entre 0 et 1 on fera correspondre un ensemble F_a de points compris entre 0 et 1, chaque point y de F_a se déduisant de chaque point x de F_0 par la condition que y est égal à $x+a$ ou $x+a-1$, y devant être, comme x, compris entre 0 et 1. On a ainsi décomposé l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles mal définis F_a, qui se déduisent les uns des autres par des translations et sont donc égaux, au sens euclidien du mot. L'ensemble E est la somme géométrique des ensembles F_a; mais, en vertu des propriétés élémentaires des ensembles dénombrables, *l'ensemble* E *peut être regardé comme la somme géométrique d'une infinité dénombrable quelconque d'ensembles choisis parmi les* F_a.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les nombres rationnels compris entre zéro et 1, rangés dans un ordre déterminé. On obtient l'ensemble E en plaçant successivement sur la droite les ensembles $F_0, F_{a_1}, F_{a_2}, \ldots, F_{a_n}, \ldots$. Désignons d'autre part par b_n le nombre 10^{-n} et considérons les ensembles $F_{b_1}, F_{b_2}, \ldots, F_{b_n}, \ldots$. Nous savons que F_{b_n} est égal à F_{a_n}, c'est-à-dire s'en déduit par deux translations (une translation $b_n - a_n$ et une translation ± 1 d'une partie de l'ensemble ainsi obtenu). Nous pouvons donc amener F_{b_n} à la place qu'occupe normalement F_{a_n} et l'ensemble E apparaîtra ainsi comme la somme géométrique des ensembles F_{b_n}, de même qu'il apparaissait comme la somme géométrique des ensembles F_{a_n}. Tel est le paradoxe; il est une conséquence naturelle de la *définition* de l'ensemble F_0 au moyen de l'axiome du choix, qui a permis de décomposer l'ensemble E en une infinité dénombrable d'ensembles égaux au sens euclidien. On peut naturellement déduire beaucoup d'autres paradoxes de ce paradoxe initial.