6.6. Quelques conséquences de la structure vectorielle

Soit E espace vectoriel sur K. On a, $\forall(\lambda,\mu) \in K^2$, $\forall X \in E$, $(\lambda-\mu)X = \lambda X - \mu X$ car dans le groupe additif E, cette égalité équivaut à $(\lambda-\mu)X + \mu X = \lambda X$, or le 1er membre vaut $[(\lambda-\mu)+\mu]X$ soit $\lambda \cdot X$. ■

De même, $\forall\lambda \in K, \forall(X,Y) \in E^2, \lambda(X-Y) = \lambda X - \lambda Y$ puisque c'est équivalent à $\lambda(X-Y) + \lambda Y = \lambda X$, ce qui est vrai, le premier membre valant $\lambda[(X-Y)+Y] = \lambda X$.

Il résulte de ces 2 règles de calcul, que

6.7. $\forall X \in E, O_K X = O_E$ *et que,* $\forall\lambda \in K$, $\lambda O_E = O_E$ (O_K scalaire nul dans K, O_E, vecteur nul dans le groupe additif E), ces résultats étant obtenus avec $\lambda = \mu$ ou $X = Y$ dans les calculs précédents. En fait on a le

THÉORÈME 6.8. — *Dans un espace vectoriel E sur un corps commutatif K on a $(\lambda X = O_E) \Longleftrightarrow (\lambda = O_K$ ou $X = O_E)$.*

Le ou n'étant pas exclusif.

Il suffit de justifier l'implication $(\lambda X = O_E) \Rightarrow (\lambda = O_K$ ou $X = O_E)$ vu ce qui précède.

Or si $\lambda X = O_E$ avec $\lambda \neq O_K$, λ^{-1} existe dans K donc $\lambda^{-1}(\lambda X) = \lambda^{-1}O_E = O_E$, c'est aussi $(\lambda^{-1}\lambda)X = 1X = X$ d'où $\lambda \neq O_K \Rightarrow X = O_E$. ■

Désormais, on écrira indifféremment O pour O_E ou O_K, le contexte justifiant de quel élément nul il s'agit.

De même, on ne précisera plus que le corps est commutatif, ce qui est supposé une fois pour toutes.

2. Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 6.9. — *On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E sur le corps K, toute partie F de E qui est sous-groupe additif de E est telle que $\forall\lambda \in K$, $\forall X \in F$, $\lambda X \in F$.*

Il est alors évident que F est un espace vectoriel sur K, les conditions de la définition 6.1 étant vérifiées.