AIR 1983 T, TA 1re Épreuve

PREMIER PROBLEME

Dans ce problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé définissant les axes (ox, oy). ox est l'axe polaire origine d'un repère en coordonnées polaires.

On rappelle que si un point M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (ox, oy), (θ,ρ) dans le repère polaire associé, on a :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

(La question 2°) est indépendante des autres.)

1°) Construire la courbe Γ définie dans (ox, oy) par la représentation paramétrique:

$$M(\theta) \begin{cases} x = \sin^2\theta \\ y = \sin^2\theta \operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

2°) On fait le changement de paramètre $\operatorname{tg}\theta = t$.

La courbe Γ est représentée par :

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Soit une droite $ax + y + c = 0$ coupant Γ en trois points $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3)$.

Former l'équation ayant pour racines t_1, t_2, t_3.

En déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que 3 points M_1, M_2, M_3 de Γ soient alignés est $\left[t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = 0\right]$.

Soit M(t) un point de Γ ; la tangente en M(t) à Γ recoupe (Γ) en M'(t').

Calculer (très simplement) t' en fonction de t.

On suppose 3 points de (Γ) $M_1(t_1)$ $M_2(t_2)$ $M_3(t_3)$ alignés suivant la droite $ax + y + c = 0$.

Les tangentes en M_1, M_2, M_3 recoupent la courbe en M'_1, M'_2, M'_3 ; montrer que ces 3 points sont alignés suivant une droite dont on donnera l'équation.

3°) On définit dans le plan moins le point O la transformation $\mathscr{C}$

$\mathscr{C}(M) = P$ par

$$M(x,y) \xrightarrow{\mathscr{C}} P(X,Y) \quad \left(\begin{array}{l} X = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

Comparer OM^2 et OP^2.

En déduire une définition géométrique simple de $\mathscr{C}$.

Soit Γ_1 la transformée de Γ par $\mathscr{C}$;

définir paramétriquement Γ_1 par le paramètre t :

$$\Gamma \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathscr{C}} \Gamma_1 \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

En déduire l'équation cartésienne (très simple) et la nature de Γ_1.

4°) On revient à la représentation initiale de Γ :

$$M(\theta) \left(\begin{array}{l} x = \sin^2\theta \\ y = \sin^2\theta \ \mathrm{tg}\ \theta \end{array} \right.$$

Montrer que θ peut être pris pour angle polaire de $M(\theta)$ dans le repère polaire d'axe ox ; en déduire une représentation de Γ en coordonnées polaires.

Former directement l'équation polaire de Γ_1 à partir de l'équation cartésienne.

Retrouver la définition géométrique de la transformation $\mathscr{C}$.

5°) Γ et Γ_1 ont 3 points communs : O, A, B.

Soit A le point dont les coordonnées (x,y) sont positives ; calculer l'aire comprise entre l'arc $\widehat{OA}$ de Γ et l'arc $\widehat{OA}$ de Γ_1.

(On choisira les formules et les représentations de Γ et Γ_1 qui sembleront les plus commodes).