Simplification de la différence des racines carrées de deux premiers successifs

Introduction

Nous nous intéressons à la différence des racines carrées de deux nombres premiers successifs p_n et p_{n+1}. Nous avons supposé que l'écart entre ces premiers suit la borne :

$$p_{n+1} - p_n < \frac{\ln(n) \cdot p_n}{n}.$$

Nous allons simplifier cette expression en utilisant l'approximation asymptotique $p_n \sim n \ln(n)$, valable pour de grandes valeurs de n.

Substitution de l'approximation de p_n

En substituant $p_n \sim n \ln(n)$ dans l'expression de Δ, nous obtenons :

$$\Delta < \frac{\ln(n)}{2n} \sqrt{n \ln(n)}.$$

Simplification de l'expression

Nous simplifions cette expression comme suit :

$$\Delta < \frac{\ln(n)}{2n} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{2} \cdot \frac{\sqrt{n \ln(n)}}{n}.$$

Nous avons alors :

$$\frac{\sqrt{n \ln(n)}}{n} = \frac{\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{n}},$$

ce qui donne :

$$\Delta < \frac{\ln(n)}{2} \cdot \frac{\sqrt{\ln(n)}}{\sqrt{n}}.$$

Expression finale

L'expression simplifiée de Δ est donc :

$$\Delta < \frac{\ln(n)\sqrt{\ln(n)}}{2\sqrt{n}}.$$

Conclusion

Si $p_n \sim n \ln(n)$, la différence des racines carrées entre deux premiers successifs est bornée asymptotiquement par :

$$\Delta < \frac{\ln(n)\sqrt{\ln(n)}}{2\sqrt{n}}.$$

Cela montre que la différence des racines carrées décroît rapidement, tout en étant modulée par des termes logarithmiques.