Axiomes de $\mathbb{R}$

TABLE DES MATIÈRES

Présentation des axiomes

Dans toute cette feuille, on considère $(X,+)$ un groupe vérifiant :

(OT). X est totalement ordonné ;

(Q). $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels.

Pour tout $x \in X$, on définit $|x|$, la *valeur absolue* de x par $\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Cette valeur absolue définit une norme.

La preuve du dernier point est laissée au lecteur. On admet donc ici les deux inégalités triangulaires.

On va démontrer que les axiomes suivants sont équivalents :

(complétude). X est complet au sens de : « toute suite de CAUCHY converge » ;

(borne-sup). X vérifie la propriété de la borne sup :
« pour toute partie non vide $A \subset X$ majorée, l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément. »
qui peut se traduire aussi par :
« toute partie $A \subset X$ non vide et majorée admet une borne supérieure »

(CV monotone). X vérifie : « toute suite croissante majorée converge »

(suites-adj). X vérifie le théorème des suites adjacentes.

(emboîtés). X vérifie la propriété des segments emboîtés

Et que, ces axiomes étant vérifiés, on a les trois corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. *si X vérifie les axiomes précédents alors :*

a) X est archimédien.

b) $\mathbb{Q}$ est dense dans X ;

c) X est un corps

DÉFINITION 2. *Un tel X est unique, il est appelé* $\boxed{\mathbb{R} \text{ : corps des réels}}$.

On ne démontrera pas l'unicité dans ce document.

Remarque 3. $\mathbb{Q}$ ne vérifie aucune de ces propriétés :

(complétude). Dans $\mathbb{Q}$, il y a des suites de CAUCHY qui ne convergent pas. Exemple : $x_0=2$ et $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$.

(Borne-sup). $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne sup. Exemple : $A=\{q\in\mathbb{Q}, q^2<2\}$.

(CV monotone). $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas : « toute suite croissante majorée converge ». Exemple : $(-x_n)$ avec la précédente.

(suites-adj). $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le théorème des suites adjacentes. Exemple : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_n\times v_n}$.

(emboîtés). $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété des segments emboîtés. Exemple : $[u_n, v_n]$ précédents.

Définitions

On rappelle les définitions, valables dans $\mathbb{Q}$ ou dans X.

DÉFINITION 4. SUITE CONVERGENTE

Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) CV vers un réel ℓ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0 : u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

DÉFINITION 5. SUITE DE CAUCHY

Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) est de CAUCHY *ssi* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, p \geqslant n_0 : |u_n - u_p| < \varepsilon$

DÉFINITION 6. BORNE SUPÉRIEURE

Soit L un sous-ensemble de X.

On appelle borne supérieure de L un éventuel élément $x \in X$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

a) $\forall \ell \in L, \ell \leqslant x$;

b) *si $y < x$, alors y n'est pas un majorant de L, i.e.* $\exists \ell \in L, y < \ell$.

DÉFINITION 7. *théorème de* CONVERGENCE MONOTONE

Toute suite croissante ($\forall n : u_{n+1} \geqslant u_n$) majorée ($\exists M \in X, \forall n : u_n \leqslant M$) est convergente.

Remarque 8. On remarque que « toute suite croissante majorée converge » est clairement équivalent à « toute suite décroissante minorée converge ».

DÉFINITION 9. *&* THÉORÈME *des* SUITES ADJACENTES

- *deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque $(u_n) \nearrow, (v_n) \searrow$ et* $\lim (v_n - u_n) = 0$;
- *si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors : $\forall n, u_n \leqslant v_n$ et ces deux suites convergent vers une limite commune*

DÉFINITION 10. PROPRIÉTÉ DES SEGMENTS EMBOÎTÉS

Si $[a_n, b_n]$ est une suite d'intervalles (donc $\forall n : a_n \leqslant b_n$), décroissante au sens de l'inclusion, alors $\bigcap_n [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Et pour les corollaires :

DÉFINITION 11. ARCHIMÉDIEN

X est dit archimédien ssi pour tous $0 < \mu < x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\mu > x$

DÉFINITION 12. DENSITÉ

Soient $A \subset B$ deux ensembles métriques. On dit que A dense dans B ssi tout ouvert de B contient un élément de A.

Autrement dit, si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

La preuve de l'équivalence est laissée au lecteur.

Lemmes

On aura besoin de quelques lemmes, valables dans $\mathbb{Q}$ ou dans X.

LEMME 13. *Si $(u_n) \to a$ et $(v_n) \to b$ et si à partir d'un certain rang on a $u_n \leqslant v_n$ alors : $a \leqslant b$*

Démonstration. par l'absurde, si $a > b$ alors posons $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$: il y a un rang commun à partir duquel $u_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et $v_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ or $a-\varepsilon = b+\varepsilon$ par construction de ε donc on a une contradiction avec l'hypothèse $u_n \leqslant v_n$. □

LEMME 14. GENDARMES *si $(u_n) \to a$ et $(v_n) \to a$ et pour tout n : $u_n \leqslant b_n \leqslant v_n$ alors $(b_n) \to a$.*

preuve : soit $\varepsilon > 0$ et n_0 un rang commun tel que $\forall n \geqslant n_0 \colon u_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et $v_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
Alors par inégalité on a aussi $\forall n \geqslant n_0 \colon b_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Cela prouve que $(b_n) \to a$.

Démonstrations

Il a 5 propriétés dont on doit montrer l'équivalence. En théorie 6 démonstrations seulement suffisent ($a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow e \Rightarrow a$) mais ici, je démontre comme les choses se sont présentées de la manière la plus naturelle en rédigeant, alors voici mon schéma :

(adjacentes)⇒(Borne-sup)⇒(CV)⇒(adjacentes)
(adjacentes)⇒(complétude)⇒(adjacentes)
(CV)⇒(emboîtés)⇒(adjacentes)
Il y aurait évidemment d'autres schémas de démonstration…

PROPOSITION 15. **(adjacentes)⇒(Borne-sup)**

par dichotomie :
Soit $A \in \mathbb{R}$ non vide majorée et $\mathcal{M}$ l'ensemble, non vide donc, de ses majorants : $\mathcal{M} = \{M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leqslant M\}$.
Soit $a_0 \in A$ et $m_0 \in \mathcal{M}$. On définit par dichotomie les suite (a_n) et (m_n) par récurrence de la manière suivante :
a_n, u_n, m_n étant définies :

si $\frac{a_n+u_n}{2} \in \mathcal{M}$	$m_{n+1} = \frac{a_n+u_n}{2}$	$a_{n+1} = a_n$
si $\frac{a_n+u_n}{2} \notin \mathcal{M}$	$m_{n+1} = m_n$	$a_{n+1} = \frac{a_n+u_n}{2}$

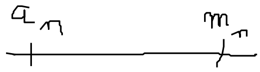

Figure 1.

.

- Alors clairement $(m_n - a_n) \to 0$ puisque $m_n - a_n = \frac{m_0 - a_0}{2^n}$, et aussi $(m_n) \searrow$ et $(a_n) \nearrow$.
  donc $(a_n), (m_n)$ convergent toutes deux vers un certain $S \in \mathbb{R}$.
- Reste à prouver que S est un majorant de A, i.e. un élément de $\mathcal{M}$, ce qui est simple puisque, par construction, $\forall n: m_n \in \mathcal{M}$. Donc $\forall a \in A, \forall n: a \leqslant m_n$ soit, par passage à la limite, $a \leqslant S$
- Reste enfin à prouver que $\forall \varepsilon > 0$: $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.
  - Si $a_0 \in \mathcal{M}$ c'est fini.
  - Sinon, par construction, aucun a_n n'est un majorant de A.
    Donc pour tout n il existe un $\mu \in A$ tel que $a_n < \mu$.
    Soit $\varepsilon > 0$ choisi, alors il y a un a_n dans $]S - \varepsilon, S[$ donc il y a un $\mu \in A \cap]S - \varepsilon, S[$ ce qui conclut.

PROPOSITION 16. **(adjacentes)⇒(Cauchy)**

Soit (u_n) de CAUCHY. Pour tout n posons $\begin{cases} Q_n = \{x_k, k \geqslant n\} \\ s_n = \sup Q_n \\ i_n = \inf Q_n \end{cases}$.
Clairement $(s_n) \searrow$ et $(i_n) \nearrow$ par définition.
De plus, Cauchy$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |s_n - i_n| < \varepsilon$, c'est-à-dire $s_n - i_n \to 0$.
Ainsi, (s_n) et (i_n) cv vers une limite commune ℓ donc on devine que $\overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n = \ell$ on sait en déduire que $\lim u_n = \ell$ mais vu qu'on redémontre tout on ne va pas utiliser ce raccourci.
On remarque que $|s_n - i_n| < \varepsilon$ conjoint à $\ell \in [i_n, s_n]$ et à $\forall n: u_n \in [i_n, s_n]$ impliquent $\forall k \geqslant n: |u_n - \ell| < \varepsilon$.
On a montré que (u_n) CV vers ℓ.

PROPOSITION 17. **(Borne-sup)⇒(CV)**

Soit (x_n) croissante et majorée, i.e. $\exists M \in X$ tel que $\forall n: x_n \leqslant M$.
Soit $b = \sup(x_n)$. On a donc $\forall n: x_n \leqslant b$. Montrons que (x_n) CV vers b.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe un x_{n_0} dans $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ sinon $b - \varepsilon$ serait un majorant.
Cet x_{n_0} est forcément dans $]b - \varepsilon, b]$ puisque b est un majorant de (x_n) par hypothèse.
On a donc, par croissance : $\forall n \geqslant n_0: x_n \in]b - \varepsilon, b]$.
On a prouvé que $x_n \to b$.

PROPOSITION 18. **(complétude)⇒(adjacentes)**

si $(u_n)\nearrow$ et $(v_n)\searrow$ sont adjacentes (i.e. vérifient ici $v_n - u_n \to 0$)
pour tous $n, p \geqslant 0$ on a $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant u_{n+p} \leqslant v_{n+p} \leqslant \cdots \leqslant \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0$
donc $|u_n - u_{n+p}| \leqslant |u_n - v_n|$ arbitrairement petit indépendamment de p ce qui prouve que (u_n) est de CAUCHY.
De même pour (v_n).
Ainsi, (u_n) et (v_n) convergent et l'hypothèse $v_n - u_n \to 0$ montre que leur limite est commune.

PROPOSITION 19. **(CV)⇒(adjacentes)**

classique : si $(u_n)\nearrow$ et $(v_n)\searrow$ sont adjacentes (i.e. vérifient ici $v_n - u_n \to 0$)
alors on a pour tout n : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0$.
Donc $(u_n)\nearrow$ majorée (par v_0) donc CV vers ℓ.
De même $(v_n)\searrow$ minorée (par u_0) donc CV vers ℓ'.
L'hypothèse $v_n - u_n \to 0$ entraîne alors $\ell = \ell'$.

PROPOSITION 20. **(CV)⇒(emboîtés)**

On a $(a_n)\nearrow$ majorée par b_0 et $(b_n)\searrow$ minorée par a_0 donc convergent respectivement vers $A \leqslant B$.
Ainsi $[A, B]$ est inclus dans tous les $[a_n, b_n]$ donc dans $\bigcap_n [a_n, b_n]$.
Remarque : si $A = B$ alors $[A, B] = \{A\}$ est un singleton, donc non vide.

PROPOSITION 21. **(emboîtés)⇒(adjacentes)**

Soient $(u_n)\nearrow$ et $(v_n)\searrow$ adjacentes et $v_n - u_n \to 0$
Alors $\forall n: u_n \leqslant v_n$; puis $\bigcap_n [u_n, v_n]$ est non vide par hypothèse.

Soit x dans cette intersection alors $\forall n: u_n \leqslant x \leqslant v_n$ et puisque $v_n - u_n \to 0$ il ne peut donc pas y avoir deux $x \neq y$ dans cette intersection. Ainsi, $\bigcap_n [u_n, v_n]$ est de la forme $\{x\}$. L'inégalité $u_n \leqslant x \leqslant v_n$ implique $x - u_n \to 0$ et $v_n - x \to 0$ donc $\lim u_n = \lim v_n = x$.

Corollaires

COROLLAIRE 22. *si X vérifie les axiomes précédents alors :*

a) *X est archimédien.*

b) *$\mathbb{Q}$ est dense dans X ;*

c) *X est un corps*

COROLLAIRE 23. *Tous ces axiomes étant vérifiés, X est aussi archimédien*

Preuve : soit $0<\mu<x$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}\colon n\,\mu<x$. Alors la suite $(n\,\mu)_n$ est croissante (car $(n+1)\,\mu-n\,\mu=\mu>0$) et majorée (par x) donc CV or elle n'est pas de CAUCHY, contradiction.

remarque : on n'a pas besoin de la structure d'anneau pour distribuer et simplifier la quantité $(n+1)\,\mu-n\,\mu$: seule la structure de groupe additif suffit.

COROLLAIRE 24. *Tous ces axiomes étant vérifiés, $\mathbb{Q}$ est dense dans X*

Soit $x\in X$. Par Archimède, soit p tel que $p\,x>1$: montrons qu'on peut exhiber un rationnel q_p dans $\left]x-\frac{1}{p},x\right[$.

Posons $\mu=\frac{1}{2\,p}$ alors avec la propriété « archimédien » vue dans le corollaire précédent on a bien $\mu>0$ et aussi $\mu<x$ donc soit $n=\min\{k\in\mathbb{N},\mu\,k>x\}$ alors on a $(n-1)\,\mu<x<n\,\mu$ or par choix de μ on a $(n-1)\,\mu\in\left]x-\frac{1}{p},x\right[$ et voilà notre rationnel q_p. On a, par les gendarmes, $x=\lim q_p$.

remarque j'ai écrit « Par Archimède, soit p tel que $p\,x>1$ » et j'airais pu écrire « soit $p>\frac{1}{x}$ » mais cela aurait nécessité antérieurement d'avoir prouvé que X est un corps.

COROLLAIRE 25. *Tous ces axiomes étant vérifiés, X est un corps.*

Soit $x\in X$ avec $x\neq 0$.

- De la densité on tire facilement l'existence de deux suites de rationnels $u\nearrow$ et $v\searrow$ vérifiant :
  $\forall n\colon u_n\leqslant x\leqslant v_n$ et $\lim u_n=\lim v_n=x$
  (preuve : si u_n est défini, on pose $u_{n+1}\in\left]x-\frac{1}{n},x\right[\cap\,]u_n,x[$, non vide par densité de $\mathbb{Q}$. Idem pour v_n.)
- De $x\neq 0$ on tire un rang n_0 à partir duquel u_n et v_n sont toutes deux dans $\left]\frac{x}{2},\frac{3x}{2}\right[$, donc non nulles.
  Alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ et $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ tendent toutes deux vers un nombre U qu'on aimerait appeler $\frac{1}{x}$.
  preuve : elles sont toutes deux de Cauchy car $\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+p}}\right|=\left|\frac{u_{n+p}-u_n}{u_n\times u_{n+p}}\right|\leqslant\frac{2}{x}\times|u_{n+p}-u_n|$.
  De $\forall n\geqslant n_0\colon u_n\leqslant x\Leftrightarrow 1\leqslant x\times\frac{1}{u_n}$ on tire $1\leqslant x\times U$.
  De même, de $\forall n\geqslant n_0\colon x\leqslant v_n\Leftrightarrow x\times\frac{1}{u_n}\leqslant 1$ on tire $x\times U\leqslant 1$.
  On a donc $x\times U=1$ ce qui prouve que x (et U aussi) est inversible.

On peut ensuite montrer l'unicité d'un tel corps, par d'autres méthodes.