Cette seconde épreuve de concours blanc consiste en trois exercices indépendants, dont les énoncés comprennent ***en tout trois pages****. Veiller à répondre aux questions dans l'ordre où elles sont posées et à numéroter* ***complètement*** *les questions traitées, comme dans l'énoncé (par exemple : I. 2. b. ou II. 5.). La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la concision, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une grande part dans l'appréciation des copies. Tout document est interdit, ainsi que l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

(.......................................)

EXERCICE II

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

• Si φ une application d'un ensemble U dans U, un *point fixe* de φ est un élément $x \in U$ tel que : $\varphi(x) = x$.

• Un *dérangement* d'un ensemble U est une bijection de U *sans point fixe*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des dérangements d'un ensemble U à n éléments, en particulier de U_n.

On pose par convention : $d_0 = 1$.

II. 1. Donner la valeur de d_1, d_2, d_3.

II. 2. Dans cette question, on suppose : $n \geq 2$.

II. 2. a. Déterminer le nombre de dérangements φ de U_n tels que : $\varphi(1) = 2$ et $\varphi(2) = 1$

(*Ind.* la réponse est un terme de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

II. 2. b. Déterminer le nombre de dérangements φ de U_n tels que : $\varphi(1) = 2$ et $\varphi(2) \neq 1$. Pour ce faire, considérer la bijection ψ de U_n définie par : $\psi(1) = 2$, $\psi(2) = 1$, $\psi(i) = i$ si $i \notin \{1,2\}$. Montrer que la composée $\theta = \varphi \circ \psi$ est une bijection θ de U_n qui admet 2 comme unique point fixe, et observer que les bijections φ correspondent bijectivement aux bijections θ.

II. 2. c. En déduire que le nombre de dérangements φ de U_n tels que $\varphi(1) = 2$ est : $d_{n-1} + d_{n-2}$.

II. 2. d. En déduire : $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.

II. 3. a. Pour $n \geq 1$, soit $x_n = d_n - nd_{n-1}$. Calculer x_n en fonction de x_{n-1}.

En déduire x_n en fonction de n.

II. 3. b. Soit $S_n = \dfrac{d_n}{n!}$. Donner S_n sous la forme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, où u_k est à calculer en fonction de k.

II. 3. c. Calculer d_4 et d_5.

• Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $d_{n,k}$ le nombre de *bijections* de U_n dans U_n ayant exactement k points fixes. On pose : $d_{0,0} = 1$ et $d_{n,k} = 0$ si $k > n \geq 0$. On a donc : $d_{n,0} = d_n$.

II. 4. Si $n \geq k \geq 0$, exprimer $d_{n,k}$ au moyen de C_n^k et de d_{n-k}.

II. 5. Représenter dans un tableau à double entrée les valeurs de $d_{n,k}$ pour les entiers n et k tels que : $0 \leq n \leq 5$ et $0 \leq k \leq 5$ (valeurs de n sur la colonne de gauche, valeurs de k sur la ligne du haut).

II. 6. a. Si $n \geq 1$, exprimer : $\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}$ en fonction de n, au moyen d'un argument combinatoire.

II. 6. b. Si $n \geq 1$, exprimer : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$ en fonction de n

(*Ind.* utiliser II. 6. a et II. 4, et un changement d'indice).

- On admet que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on a : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, et que, pour $n \geq 2$ et $k \geq 2$, on a : $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

II. 7. Si $n \geq 1$, calculer : $E = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k\, d_{n,k}$.

II. 8. a. Si $n \geq 2$, calculer : $M = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)d_{n,k}$.

II. 8. b. En déduire la valeur de : $V = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} (k-E)^2\, d_{n,k}$.
